

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 1 (69)

2024

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Бортковская М. Р.* Исследование фазового портрета системы дифференциальных уравнений, моделирующей конкурентное взаимодействие 5
- Буданов К. М.* Об инфинитезимальных преобразованиях расслоений Вейля как решениях дифференциального уравнения для производной Ли связности полного лифта 17
- Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А.* Исследование нелинейной математической модели механической системы «трубопровод – датчик давления» 24
- Смирнов Ю. Г.* О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред 38
- Ройтенберг В. Ш.* О нелокальных бифуркациях в двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией 51
- Гладков С. О.* Новый подход к задаче о брахистохроне с учетом сухого трения 64
- Бойков И. В., Пивкина А. А.** Применение непрерывного метода решения операторных уравнений к приближенному решению амплитудно-фазовой проблемы 76
- Цунак А. А.* Метод интегральных уравнений в задаче распространения электромагнитной волны в пространстве, заполненном локально неоднородной средой, со слоем графена на границе области неоднородности 96
- Липич А. О., Медведик М. Ю.* Метод микроволновой томографии для решения обратной задачи на телах цилиндрической формы 107
- Фомин А. И., Титаренко В. И.* Дифференциальные изоморфизмы первого порядка канонических гиперболических уравнений 118

ФИЗИКА

- Гришаев В. Я., Никишин Е. В.* Способы приведения временной зависимости фототока резистора к форме интенсивности оптических импульсов, частота следования которых выше граничной частоты фотоприемника 126
- Браже Р. А.* Кванты погонной теплоемкости и погонной тепловой индуктивности в наномасштабных теплопроводах 138

<i>Браже Р. А., Гришина А. А.</i> Кванты коэффициентов Риги – Ледюка и магнитотеплового сопротивления.....	151
<i>Журавлев В. М.</i> Точные сингулярные решения уравнений Хохлова – Заболотской и квазилинейные уравнения первого порядка.....	160

ПАМЯТИ УЧЕНЫХ

Памяти Ильи Владимировича Бойкова	175
---	-----

**UNIVERSITY PROCEEDINGS
VOLGA REGION
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 1 (69)

2024

CONTENT

MATHEMATICS

<i>Bortkovskaya M.R.</i> Researching the phase portrait for a differential equations system modelling competitive interaction	5
<i>Budanov K.M.</i> On infinitesimal transformations of Weil bundles as solutions of differential equation for Lie derivative of complete lift connection.....	17
<i>Velmisov P.A., Tamarova Yu.A.</i> Studying the nonlinear mathematical model of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”	24
<i>Smirnov Yu.G.</i> On the solvability of the integral electric field equation for nonabsorbing media	38
<i>Roitenberg V.Sh.</i> On nonlocal bifurcations in two-parameter families of vector fields on the plane with involutive symmetry	51
<i>Gladkov S.O.</i> A new approach to brachistochrone problem with an account dry friction	64
<i>Boykov I.V., Pivkina A.A.</i> Application of the continuous method for solving operator equations to the approximate solution of the amplitude-phase problem.....	76
<i>Tsupak A.A.</i> An integral equation method in the problem of electromagnetic wave propagation in a space filled with a locally inhomogeneous medium with a graphene layer at the boundary of the inhomogeneity region	96
<i>Lapich A.O., Medvedik M.Yu.</i> The microwave tomography method for solving the inverse problem on cylindrical bodies	107
<i>Fomin A.I., Titarenko V.I.</i> The first-order differential isomorphisms of canonical hyperbolic equations.....	118

PHYSICS

<i>Grishaev V.Ya., Nikishin E.V.</i> Methods for bringing the time dependence of photocurrent resistor to the shape of the optical pulses’ intensity, the repetition frequency of which is higher than the boundary frequency of the photodetector.....	126
<i>Brazhe R.A.</i> Quanta of linear heat capacity and linear thermal inductance in nanoscale heat-conducting pipes.....	138
<i>Brazhe R.A., Grishina A.A.</i> Quanta of the Righi – Leduc coefficients and magneto-thermal resistance	151

Zhuravlev V.M. The exact singular solutions of the Khokhlov – Zabolotskaya equations and first-order quasilinear equations 160

IN THE MEMORY OF SCIENTISTS

Commemorating Il'ya Vladimirovich Boykov..... 175

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.925.5

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-1

Исследование фазового портрета системы дифференциальных уравнений, моделирующей конкурентное взаимодействие

М. Р. Бортковская

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
mbort@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В динамическом моделировании конкурентного взаимодействия в разных областях актуально применение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами. Исследование двумерных систем, используемых в таких моделях, подробно разработано и отражено в научной литературе. Изучение систем большей размерности часто проводится методами численного анализа, в литературе отражены сложности изучения таких систем классическими методами качественной теории дифференциальных уравнений. Целью данной работы является изучение методами качественной теории трехмерной системы, применяемой для моделирования взаимодействия трех конкурирующих групп. *Материалы и методы.* Дан обзор научных работ о применении систем обыкновенных дифференциальных уравнений для моделирования динамики конкуренции. Рассматривается трехмерная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с шестью параметрами на инвариантном треугольнике частот. Определены понятия областей приближения (удаления) особых точек системы. Рассматривая пересечения треугольника частот с поверхностями уровня специально подобранных функций, разбиваем его на области приближения (удаления) для каждой особой точки, расположенной на его сторонах, но не в вершинах. *Результаты.* Найдены уравнения границ областей приближения (удаления) указанных особых точек, зависящие от параметров системы. Доказаны теоремы, описывающие взаимное расположение границ построенных областей и особых точек системы. Рассмотрен численный пример со значениями коэффициентов системы, основанными на данных лингвистической задачи. Он иллюстрирует разработанный метод анализа фазового портрета. *Выводы.* Разработанный и теоретически обоснованный метод позволяет уточнять детали фазового портрета изучаемой системы без ее аналитического или численного решения.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, автономная трехмерная система, динамическое моделирование конкуренции, фазовый портрет

Для цитирования: Бортковская М. Р. Исследование фазового портрета системы дифференциальных уравнений, моделирующей конкурентное взаимодействие // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 5–16. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-1

Researching the phase portrait for a differential equations system modelling competitive interaction

M.R. Bortkovskaya

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia
mbort@mail.ru

Abstract. *Background.* Applying parametric systems of ordinary differential equations to the dynamic modelling of competitive interaction is of current interest. There are lots of publications dedicated to two-dimensional systems in this connection. Investigation of higher-dimensional system often demands the methods of numerical analysis; actual scientific literature represents some difficulties in applying classic methods of qualitative theory to higher-dimensional systems. The purpose of this article is to study a 3-dimensional system being applied for modelling of three competing groups interaction, just by the qualitative theory method. *Materials and methods.* A review of publications about differential equations in competition dynamics modelling is done. We consider a 6-parametric 3-dimensional system on the invariant triangle of frequencies. Definitions of approaching and retiring areas of singular points of the system are formulated. Through consideration of level surfaces of specially constructed functions, we demonstrate how to find out whether an arbitrary point of the frequency triangle belongs to approaching or retiring areas relatively to all singular points located on the triangle sides (but not at its apexes). *Results.* The equations of the bounds of these areas have been derived. Some theorems describing mutual disposition of those curves (approaching-retiring areas bounds) and singular points of system are proved. A numeric example is given to illustrate the theoretical results. This example is based on linguistic problem data. *Conclusions.* The developed and theoretically grounded method allows to precise phase portrait of the system under consideration without solving analytically nor numerically.

Keywords: ordinary differential equations, autonomous 3-dimensional system, dynamic modelling of competition, phase portrait

For citation: Bortkovskaya M.R. Researching the phase portrait for a differential equations system modelling competitive interaction. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):5–16. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-1

Введение

Рассматривается система трех дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = x_i \cdot \left((Ax)_i - x^T Ax \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \gamma & 0 & \delta \\ \varepsilon & \zeta & 0 \end{pmatrix}$ – постоянная матрица; $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ – искомая вектор-функция.

Система вида (1) рассмотрена в книге [1] как пример динамической модели конкуренции трех групп в пределах одной популяции. Также система вида (1) использована автором данной статьи для моделирования конкуренции в языке [2]. Система (1) рассматривается на инвариантном треугольнике

частот $D = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i = 1; x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \right\}$, здесь $x_i(t)$ – относительная частота

в популяции представителей i -й конкурирующей группы в момент времени t . Элементы матрицы A являются параметрами задачи, определяемыми из эмпирических соображений, а множество систем вида (1) с произвольными значениями параметров рассматривается как 6-параметрическое семейство систем. В книге [1] идея построения фазового портрета системы вида (1) показана на числовом примере моделирования конкуренции. Согласно модели, представленной в [1], считаем диагональные элементы матрицы A нулевыми и используем инвариантность D относительно системы (1), которую можно проверить непосредственно [2]. Данная работа посвящена качественному исследованию системы (1) в зависимости от значений параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$.

Актуальность исследования системы (1) методами качественной теории дифференциальных уравнений следует из общих тенденций динамического моделирования конкурентных процессов в разных областях, широко представленного в научной литературе. Так, в статьях [3–11] системы обыкновенных дифференциальных уравнений используются для моделирования конкуренции в экономике, социологии, информатике, популяционной динамике. Рассмотренные в статьях [3–8] двумерные системы успешно анализируются классическими методами исследования систем дифференциальных уравнений (например, первым методом Ляпунова [5], методами бифуркационного анализа [7]), а также с помощью операционного исчисления [8]. В работах [3–8] рассмотрение двумерных моделей проводится без использования численного анализа. В статье [3] применяется двумерная модельная система из книги [1], откуда взята трехмерная популяционная модель, изучаемая нами. Также в статье [3] отмечены сложности, возникающие при переходе от двумерных систем к системам большей размерности. В работах [9, 10] анализируются системы дифференциальных уравнений размерности 3, моделирующие динамику конкуренции, к этим системам применяются методы численного анализа. В статье [9] применяется метод Рунге – Кутты четвертого порядка для системы третьего порядка. В статье [10] к системе третьего порядка применен численный анализ, а двумерная система изучается точными методами качественной теории. В статье [11] параметрические семейства динамических систем третьего и четвертого порядка рассматриваются для отдельных числовых значений параметров. Обзор литературы показывает, во-первых, что для моделирования конкуренции часто применяются системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка; во-вторых, что для таких систем третьего порядка, в отличие от «плоских» систем, методы качественной теории дифференциальных уравнений представляют сложности и применяются реже численных методов. Настоящая статья посвящена развитию и применению качественного метода исследования для системы третьего порядка. Несмотря на то, что система рассмотрена на плоскости, для системы вида (1) оказывается удобным не переходить к двумерной системе исключением одной из координат, а рассматривать систему третьего порядка, обобщая идею из книги [1]. Важно заметить, что в [1] система (1) используется для моделирования динамики популяции; в работах [3, 5, 10] модели популяционной

динамики успешно адаптированы для моделирования конкуренции в разных областях, что говорит о прикладной перспективности нашей работы.

1. Постановка задачи

Дадим определения областей приближения к особым точкам и удаления от них для особых точек системы (1), находящихся на сторонах треугольника частот; получим уравнения границ областей приближения (удаления) и исследуем геометрическое расположение найденных кривых относительно особых точек системы (1).

Цель работы: уточнить фазовый портрет системы (1) на треугольнике частот; для этого необходимо найти кривые, разделяющие области притяжения и отталкивания особых точек, расположенных на сторонах треугольника D , но не в его вершинах.

2. Особые точки системы (1)

Особые точки системы (1) найдены в работе [2]. Вершины инвариантного треугольника частот D являются особыми точками системы (1) при любых значениях параметров. Эти особые точки всегда сложные (матрица линеаризованной системы в этих точках имеет по крайней мере одно нулевое собственное число). На стороне треугольника частот $\{x_3 = 0, x_1 + x_2 = 1, x_i > 0,$

$i = 1, 2\}$ в случае, когда $\alpha\gamma > 0$, имеется особая точка $M_1\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}, 0\right)$. Она

простая (седло либо узел), если $\gamma\zeta + \alpha\varepsilon - \alpha\gamma \neq 0$. Если $\alpha\gamma = 0$, $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$, то эта особая точка сложная и совпадает с вершиной треугольника частот. Если $\alpha\gamma < 0$ или $\alpha^2 + \gamma^2 = 0$, то на соответствующей стороне треугольника D также нет особых точек системы (1), за исключением вершин треугольника. На

других двух сторонах треугольника имеются особые точки $M_2\left(\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}; 0; \frac{\varepsilon}{\beta+\varepsilon}\right)$

и $M_3\left(0; \frac{\delta}{\delta+\zeta}; \frac{\zeta}{\delta+\zeta}\right)$. Стороны треугольника D являются инвариантными

множествами системы (1), и на них легко из вида правых частей системы (1) определить направления движения.

Для отыскания особых точек внутри треугольника D достаточно установить, имеет ли алгебраическая система, полученная приравнением нулю правых частей системы (1), решения $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ такие, что точка $N(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ – внутренняя точка D , и найти их.

3. Границы областей приближения к особым точкам и удаления от особых точек системы (1), расположенных на сторонах треугольника частот, но не в его вершинах

Определение 1. Пусть $\{l_C\}, 0 < C < C'$, где значение C' конечно или бесконечно, – непрерывное однопараметрическое семейство кривых, лежащих в треугольнике частот D и таких, что через каждую внутреннюю точку D проходит ровно одна кривая семейства. Пусть P – особая точка системы

(1), расположенная на границе треугольника D , и имеет место следующее: каждый луч, исходящий из точки P , лежащий в плоскости $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$ и направленный внутрь D , пересекает каждую кривую l_C ровно в одной точке, причем значения C , соответствующие пересекаемому лучом кривым, меняются вдоль луча строго монотонно. Тогда семейство кривых $\{l_C\}$ будем называть правильным по отношению к особой точке P .

Определение 2. Пусть точка P и семейство кривых $\{l_C\}$ таковы, как в определении 1. Пусть для определенности при движении вдоль каждого луча, исходящего из точки P , значения C строго *убывают*. Рассмотрим точку T внутри D , она лежит на некоторой (единственной) кривой $l_{C_0} \in \{l_C\}$. Пусть траектория системы (1), проходящая через точку T , имеет участок d , содержащий внутри точку T и такой, что при движении по этому участку траектории в соответствии с системой (1) значения C при пересечении d с кривыми $\{l_C\}$ строго *возрастают*. Тогда точку T назовем точкой приближения к особой точке P относительно правильного семейства кривых $\{l_C\}$ (в этом определении, очевидно, можно поменять местами убывание и возрастание параметра C вдоль произвольного луча, исходящего из P , и вдоль участка траектории, проходящей через T , соответственно).

Аналогично определим точку удаления от особой точки P относительно семейства кривых $\{l_C\}$: оба выделенных в определении 2 слова в этом случае должны обозначать одинаковый характер монотонности.

Определение 3. Плоскую область $G \subset D$, состоящую из точек приближения к особой точке P (удаления от P) относительно правильного семейства кривых $\{l_C\}$, назовем соответственно областью приближения (удаления) точки P относительно этого семейства кривых.

Теорема 1. Пусть $\tilde{\Gamma}_1$ – пересечение треугольника частот D с кривой Γ_1 , лежащей в плоскости $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$, и такой, что ее проекция на плоскость $x_1 O x_2$ задается уравнением второго порядка

$$(\beta + \varepsilon)x_1^2 + (\delta + \zeta)x_2^2 + (-\alpha + \beta - \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)x_1x_2 + \left(\frac{\gamma^2 - \alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha + \gamma} - (\beta + \varepsilon) \right) x_1 + \left(\frac{\alpha^2 - \alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha + \gamma} - (\delta + \zeta) \right) x_2 + \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha + \gamma} = 0.$$

Тогда кривая $\tilde{\Gamma}_1$ разделяет область приближения и область удаления особой точки $M_1 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, 0 \right)$ (при $\alpha\gamma > 0$) системы (1) на треугольнике D относительно некоторого правильного семейства кривых, если только данное уравнение второго порядка не задает прямую, точку или пустое множество.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \cdot x_2^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}}$ переменных x_1, x_2, x_3 (фактически зависящую только от x_1, x_2). Для функции одной переменной $g(x_1) = u(x_1, 1-x_1), x_1 \in (0; 1)$, легко убедиться, что при любом знаке $\alpha + \gamma$ она в точке $x_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ имеет максимум $C_{\max} = g\left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right)$, слева от этой точки функция $g(x_1)$ возрастает, справа убывает; плоская кривая $u(x_1, x_2) = C_{\max}$ касается отрезка $\{x_1 + x_2 = 1; 0 \leq x_1 \leq 1\}$ в точке $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}\right)$. Из уравнений кривых $u(x_1, x_2) = C, 0 < C < C_{\max}$, очевидно, что дуга каждой из них между двумя точками пересечения данной кривой с отрезком $\{x_1 + x_2 = 1; 0 \leq x_1 \leq 1\}$ лежит в треугольнике $\{x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$. Линии пересечения поверхностей уровня $u(x_1, x_2) = C, 0 < C < C_{\max}$, с треугольником D образуют правильное семейство кривых по отношению к особой точке M_1 , и чем больше значение C , тем кривая $u(x_1, x_2) = C$ ближе к точке M_1 .

Найдем производную функции $u(x_1, x_2)$ в силу системы (1): $\dot{u} = \frac{u}{\alpha + \gamma} (\alpha(Ax)_1 + \gamma(Ax)_2 - (\alpha + \gamma)x^T Ax)$. Внутри D выражение $\frac{u(x_1, x_2)}{\alpha + \gamma}$ имеет постоянный знак, и знак выражения $\alpha(Ax)_1 + \gamma(Ax)_2 - (\alpha + \gamma)x^T Ax$ в произвольной внутренней точке D говорит о том, происходит ли движение по траектории системы (1) в этой точке в сторону приближения к особой точке M_1 или удаления от нее, точнее, растет или убывает значение u вдоль траектории. Заменяя x_3 в выражении $\alpha(Ax)_1 + \gamma(Ax)_2 - (\alpha + \gamma)x^T Ax$ на $1 - x_1 - x_2$ и приравнявая полученное выражение нулю, получаем требуемое уравнение кривой второго порядка. При переходе точки (x_1, x_2) через эту кривую знак производной \dot{u} в силу системы (1) в точке $(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2)$ меняется, если только не реализуется один из вырожденных случаев кривой второго порядка, указанных в формулировке теоремы. *Теорема доказана.*

Замечание 1. Рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 1, демонстрируются в книге [1] на числовом примере, они названы там рассуждениями «типа Ляпунова», поскольку опираются на идеи второго метода Ляпунова [12].

Замечание 2. С помощью функций $v(x_1, x_3) = x_1^{\frac{\beta}{\beta+\epsilon}} \cdot x_3^{\frac{\epsilon}{\beta+\epsilon}}$ и $w(x_2, x_3) = x_2^{\frac{\delta}{\delta+\zeta}} \cdot x_3^{\frac{\zeta}{\delta+\zeta}}$ можно найти границы областей приближения и удаления для особых точек M_2, M_3 .

Теорема 2. Пусть кривая $\tilde{\Gamma}_i$, $i=1,2,3$, разделяет в D области приближения и удаления точки M_i . Если существует особая точка $N(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ системы (1), расположенная внутри треугольника частот D , то любая из кривых $\tilde{\Gamma}_i$, $i=1,2,3$, проходит через точку N .

Доказательство. Для определенности рассмотрим кривую $\tilde{\Gamma}_1$, она представляет собой пересечение треугольника D с множеством точек, задаваемым системой уравнений

$$\begin{cases} \alpha(Ax)_1 + \gamma(Ax)_2 - (\alpha + \gamma)x^T Ax = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

В точке $N(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ правые части системы (1) равны нулю, т.е. $(A\tilde{x})_i - \tilde{x}^T A\tilde{x} = 0$, $i=1,2$, где $\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, и $\sum_{i=1}^3 \tilde{x}_i = 1$, поэтому координаты точки N удовлетворяют системе (2), и точка N лежит на $\tilde{\Gamma}_1$. Для $\tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3$ доказательство аналогично. *Теорема доказана.*

Теорема 3. Пусть кривая $\tilde{\Gamma}_i$, $i=1,2,3$, разделяет в D области приближения и удаления особой точки M_i системы (1). Тогда $\tilde{\Gamma}_i$ проходит через точку M_i .

Доказательство. Для определенности рассмотрим кривую $\tilde{\Gamma}_1$. Легко проверить непосредственно, что точка $M_1\left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, 0\right)$ удовлетворяет системе уравнений (2) из доказательства теоремы 2. Для $\tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3$ доказательство аналогично. *Теорема доказана.*

4. Числовой пример

Рассмотрим систему (1), где параметры имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha &= 11\frac{2}{5} = 11,40; \quad \beta = -1\frac{1}{5} = -1,20, \quad \gamma = 3\frac{2}{5} = 3,40, \\ \delta &= 5\frac{2}{5} = 5,40, \quad \varepsilon = -2\frac{2}{5} = -2,40, \quad \zeta = 12\frac{7}{10} = 12,70. \end{aligned}$$

Она получена в работе [2] при построении модели конкуренции трех групп женских личных имен в русском языке. При формировании элементов матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$ в работе [2] использованы относительные частоты встречаемости групп имен в языке в изучаемый временной период, элемент a_{ij} выражает «выигрыш» имени из i -й группы в ситуации конкуренции с именем j -й группы, т.е. при совершении выбора имядателем между первым и вторым. Элемент a_{ij} совпадает с отношением частот встречаемости соответствующих групп имен, умножаемым на эмпирически полученные поправки, основанные на статистике мотивов выбора имени. В работе [2] дан по-

дробный алгоритм построения матрицы A с указанием источников статистических данных встречаемости имен и мотивов имяназвания, обсуждаются проблемы усовершенствования этого алгоритма. После построения матрицы из всех элементов каждого ее столбца вычитаем диагональный элемент этого столбца, что, как сказано в книге [1] и непосредственно проверено в работе [2], не изменяет рассматриваемую систему на множестве D . Здесь $\alpha\gamma > 0$, $\delta\zeta > 0$, $\beta\varepsilon > 0$, на сторонах треугольника частот есть особые точки системы (1): $M_2(0,30; 0; 0,70)$ (неустойчивый узел), $M_3(0; 0,30; 0,70)$ и $M_1(0,80; 0,20; 0)$ (устойчивые узлы); координаты точек даны приближенно (с округлением); тип точек определяется по первому приближению. Внутри треугольника частот одна особая точка $N(0,34; 0,31; 0,35)$ (трехмерное седло). На рис. 1,а изображены гиперболы – проекции на плоскость (x_1, x_2) границ областей приближения и удаления для особых точек M_i (см. теорему 1); проекции точек на плоскость (x_1, x_2) отмечены теми же буквами, что и сами точки, но со штрихом. Уравнения кривых:

1) $-3,60x_1^2 + 18,10x_2^2 - 0,30x_1x_2 + 4,06x_1 - 9,64x_2 + 0,32 = 0$ (Γ'_1 – проекция кривой Γ_1 для особой точки M_1);

2) $-3,60x_1^2 + 18,10x_2^2 - 0,30x_1x_2 + 2,40x_1 - 5,43x_2 - 0,40 = 0$ (Γ'_2 – проекция кривой Γ_2 для особой точки M_2);

3) $-3,60x_1^2 + 18,10x_2^2 - 0,30x_1x_2 + 1,32x_1 - 10,80x_2 + 1,61 = 0$ (Γ'_3 – проекция кривой Γ_3 для особой точки M_3).

На рис. 1,б изображены область приближения (незакрашенная) и область удаления (закрашенная) точки M_1 и граница $\tilde{\Gamma}_1$ этих областей, показано примерное расположение траекторий системы (1) со значениями параметров из примера, полученное на основании предыдущих построений. Тонкие линии на рис. 1,б – правильное семейство кривых, использованное в доказательстве теоремы 1.

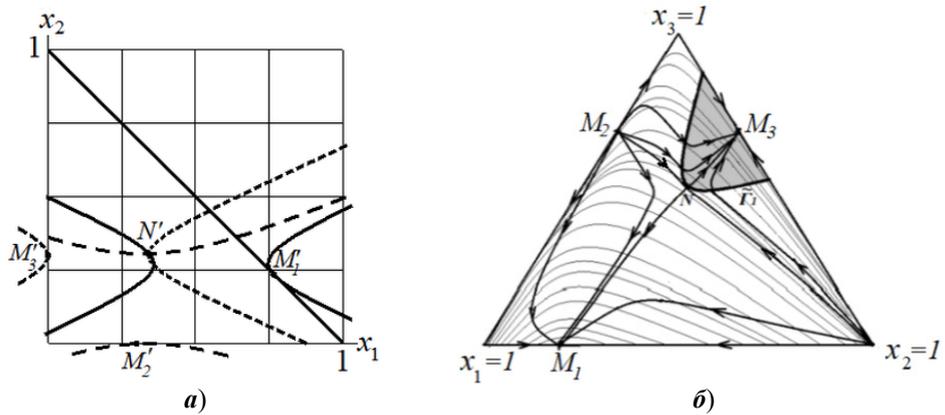


Рис. 1. Гиперболы – проекции на плоскость (x_1, x_2) границ областей приближения и удаления (а): сплошная линия – кривая Γ'_1 , крупный пунктир – кривая Γ'_2 , мелкий пунктир – кривая Γ'_3 ; области приближения и удаления особой точки M_1 (б)

Совмещая результаты рассмотрения областей приближения и удаления всех трех особых точек M_i , $i=1,2,3$, можно построить фазовый портрет системы. На рис. 2,*а* схематично изображены границы $\tilde{\Gamma}_i$, $i=1,2,3$, областей приближения и удаления для точек M_i , $i=1,2,3$, и примеры возможного расположения траекторий системы в согласии с полученным расположением $\tilde{\Gamma}_i$, $i=1,2,3$, на рис. 2,*б* – фазовый портрет системы, полученный приближенным решением системы методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

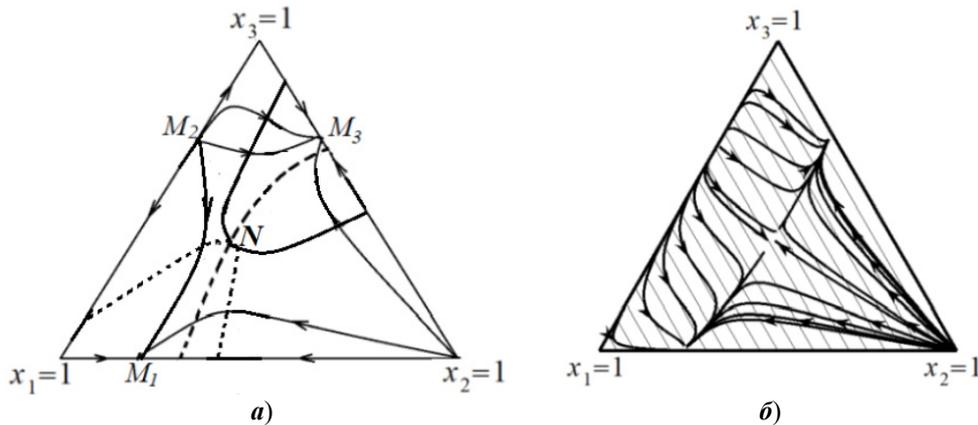


Рис. 2. Теоретические построения (а); численное решение системы (б)

На рис. 2,*а* сплошная линия – кривая $\tilde{\Gamma}_1$, крупный пунктир – кривая $\tilde{\Gamma}_2$, мелкий пунктир – $\tilde{\Gamma}_3$, сплошные линии со стрелками – траектории системы (1); рис. 2,*а* хорошо согласуется с рис. 2,*б*.

Заключение

Полученные результаты применимы для системы (1), за исключением специальных случаев, когда параметры системы связаны соотношениями, указанными в статье. В остальных случаях, зная координаты любой неособой точки треугольника частот, можно установить поведение проходящей через эту точку траектории по отношению к любой особой точке системы (1), расположенной на границе треугольника частот, но не в его вершинах, т.е. определить, в какой из областей (приближения или удаления) по отношению к данной особой точке находится выбранная точка. Теоремы о взаимном расположении областей приближения (удаления) и особых точек системы (1) помогают уточнить фазовый портрет системы на треугольнике частот и при использовании приближенных методов решения системы. Например, на рис. 2,*б* мы видим точки перегиба траекторий, а изложенный в статье метод позволяет точно установить множество точек, в которых траектории переходят из области приближения к особой точке в область удаления от нее. Разработанный метод построения фазового портрета системы (1) удобен для сравнения эмпирических данных с результатами моделирования. Перспектива дальнейшего исследования состоит в рассмотрении значений параметров, пока исключенных из рассмотрения, а также в применении разработанного ме-

тогда для локализации положения сепаратрис особых точек, тем более, что приближенные методы решения плохо справляются с последней задачей.

Список литературы

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / пер. с англ. Т. Д. Вентцель ; под ред. [и с предисл.] Н. Х. Розова. М. : Мир, 1986. 243 с.
2. Бортковская М. Р. Пример моделирования конкуренции в языке с помощью системы дифференциальных уравнений // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем (Амур-2022). XVI Всероссийская с международным участием школа-симпозиум : сб. науч. тр. Симферополь, 2022. С. 74–79.
3. Журавка А. В., Московкин В. М., Брук В. В. Двумерная модель конкурентных взаимодействий в экономике: теория и численные эксперименты // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. 2001. № 115. С. 98–103.
4. Антипова Е. С. Математическое моделирование конкуренции двух идеологий с внутренними конфликтами // Вестник СибГУТИ. 2022. № 4. С. 27–42. doi: 10.55648/1998-6920-2022-16-4-27-42
5. Макаренко С. И. Динамическая модель двунаправленного информационного конфликта с учетом возможностей сторон по наблюдению, захвату и блокировке ресурса // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 1. С. 60–89. doi: 10.24411/2410-9916-2017-10106
6. Батищева Г. А., Журавлева М. И., Лукьянова Г. В. Нелинейная динамическая модель межсекторной конкуренции // Вестник Ростовского государственного экономического университета (РИНХ). 2021. № 2 (74). С. 162–166.
7. Абрамова Е. П., Рязанова Т. В. Динамические режимы стохастической модели «хищник–жертва» с учетом конкуренции и насыщения // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. № 3 (11). С. 515–531. doi: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-515-531
8. Ганичева А. В., Ганичев А. В. Математическая модель конкуренции политических партий // Экономика. Информатика. 2021. № 2 (48). С. 341–349. doi: 10.52575/2687-0932-2021-48-2-341-349
9. Агуреев И. Е. Применение теории Фейгенбаума – Шарковского – Магницкого для анализа модели конкуренции двух автомобильных перевозчиков // Труды научно-исследовательского института системных исследований Российской академии наук. 2008. Т. 33. С. 159–175.
10. Альрефаи В. А. Моделирование и численный анализ динамических систем с конкурентным взаимодействием // Технологический аудит и резервы производства. 2015. № 2/5 (22). С. 36–41. doi: 10.15587/2312-8372.2015.41156
11. Аганин Ю. И. Динамические модели конкуренции технологий производства взаимозаменяемых товаров // Вестник университета. 2014. № 6. С. 63–68.
12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости : учеб. пособие для вузов. СПб. : Лань, 2023, 480 с.

References

1. Errousmi D., Pleys K. Ordinary differential equations. Qualitative theory with applications. Translated from Eng. T.D. Venttsel'; ed. by N.Kh. Rozov. Moscow: Mir, 1986:243. (In Russ.)
2. Bortkovskaya M.R. An example of modeling competition in a language using a system of differential equations. *Analiz, modelirovanie, upravlenie, razvitie sotsial'no-ekonomicheskikh sistem (Amur-2022). XVI Vserossiyskaya s mezhdunarodnym uchastiem shkola-simpozium: sb. nauch. tr. = Analysis, modeling, management, devel-*

- opment of socio-economic systems (Amur-2022). The 16th All-Russian school-symposium with international participation: collected papers. Simferopol', 2022:74–79. (In Russ.)
3. Zhuravka A.V., Moskovkin V.M., Bruk V.V. Two-dimensional model of competitive interactions in economics: theory and numerical experiments. *Avtomatizirovannye sistemy upravleniya i pribory avtomatiki = Automated control systems and automation devices*. 2001;(115):98–103. (In Russ.)
 4. Antipova E.S. Mathematical modeling of competition between two ideologies with internal conflicts. *Vestnik SibGUTI = Bulletin of SibSUTIS*. 2022;(4):27–42. (In Russ.). doi: 10.55648/1998-6920-2022-16-4-27-42
 5. Makarenko S.I. A dynamic model of a bidirectional information conflict, taking into account the parties' capabilities to monitor, seize and block a resource. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti = Management, communication and security systems*. 2017;(1):60–89. (In Russ.). doi: 10.24411/2410-9916-2017-10106
 6. Batishcheva G.A., Zhuravleva M.I., Luk'yanova G.V. Nonlinear dynamic model of intersectoral competition. *Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta (RINKh) = Bulletin of Rostov State Economic University*. 2021;(2):162–166. (In Russ.)
 7. Abramova E.P., Ryazanova T.V. Dynamic modes of the stochastic predator-prey model taking into account nodules and saturation. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie = Computer research and modeling*. 2019;(3):515–531. (In Russ.). doi: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-515-531
 8. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Mathematical model of competition between political parties. *Ekonomika. Informatika = Economy. Computer science*. 2021;(2):341–349. (In Russ.). doi: 10.52575/2687-0932-2021-48-2-341-349
 9. Agureev I.E. Application of the Feigenbaum–Sharkovsky–Magnitsky theory to analyze the model of competition between two road carriers. *Trudy nauchno-issledovatel'skogo instituta sistemnykh issledovaniy Rossiyskoy akademii nauk = Proceedings of the Scientific and Research Institute of System Researches of the Russian Academy of Sciences*. 2008;33:159–175. (In Russ.)
 10. Al'refai V.A. Modeling and numerical analysis of dynamic systems with competitive interaction. *Tekhnologicheskii audit i rezervy proizvodstva = Technological audit and production reserves*. 2015;(2/5):36–41. (In Russ.). doi: 10.15587/2312-8372.2015.41156
 11. Aganin Yu.I. Dynamic models of competition in the technology of production of interchangeable goods. *Vestnik universiteta = University bulletin*. 2014;(6):63–68. (In Russ.)
 12. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti: ucheb. posobie dlya vuzov = Lectures on the mathematical theory of stability: textbook for universities*. Saint Petersburg: Lan', 2023:480. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Мария Романовна Бортковская

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Физико-механический институт,
Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
(Россия, г. Санкт-Петербург,
ул. Политехническая, 29)

E-mail: mbort@mail.ru

Maria R. Bortkovskaya

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of higher mathematics,
Institute of Physics and Mechanics,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University (29 Politekhnicheskaya street,
St. Petersburg, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 11.08.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 21.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

УДК 514.76

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-2

Об инфинитезимальных преобразованиях расслоений Вейля как решениях дифференциального уравнения для производной Ли связности полного лифта

К. М. Буданов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

ko13bud@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Одной из важнейших задач в теории расслоений над алгебрами Вейля является изучение инфинитезимальных аффинных преобразований этих расслоений. Получены альтернативные выражения инфинитезимальных аффинных преобразований расслоений Вейля со связностью полного лифта над специальными алгебрами Вейля. *Материалы и методы.* Используются методы тензорного анализа, теории производной Ли. *Результаты.* Получены альтернативные выражения инфинитезимальных аффинных преобразований, а также условия, накладываемые на компоненты этих преобразований. *Выводы.* Доказано, что инфинитезимальные аффинные преобразования расслоений Вейля со связностью полного лифта над специальными алгебрами Вейля могут быть представлены в виде суммы лифтов горизонтального и горизонтально-векторного типа.

Ключевые слова: альтернативное представление, инфинитезимальное аффинное преобразование, расслоение Вейля, связность полного лифта

Для цитирования: Буданов К. М. Об инфинитезимальных преобразованиях расслоений Вейля как решениях дифференциального уравнения для производной Ли связности полного лифта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 17–23. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-2

On infinitesimal transformations of Weil bundles as solutions of differential equation for Lie derivative of complete lift connection

K.M. Budanov

Penza State University, Penza, Russia

ko13bud@rambler.ru

Abstract. *Background.* The study of infinitesimal affine transformation of bundles over Weil algebra is one of the important problems in the theory of these bundles. Alternative representations of infinitesimal affine transformations of Weil bundle with complete lift connection over special Weil algebra are obtained. *Materials and methods.* Methods of tensor analysis and Lie derivative are used. *Results.* Alternative expressions of infinitesimal affine transformations are obtained, as well as conditions imposed on the components of these transformations. *Conclusions.* It is proved that infinitesimal affine transformations of Weil bundles with the complete lift connection over special Weil algebras can be represented as a sum of lifts of horizontal and horizontal vector type.

Keywords: alternative representation, infinitesimal affine transformation, Weil bundle, complete lift connection

For citation: Budanov K.M. On infinitesimal transformations of Weil bundles as solutions of differential equation for Lie derivative of complete lift connection. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):17–23. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2024-1-2

Введение

В данной работе изучается строение инфинитезимальных аффинных преобразований (ИАП) расслоений Вейля над специальными алгебрами Вейля [1], высота и ширина которых равна 2. В каноническом разложении ИАП представлены полный и вертикальные лифты векторных полей, а также горизонтально-векторные лифты тензорных полей типа $(1, 1)$. Компоненты ИАП удовлетворяют равенствам, представленным в [2]. Используя взаимосвязь вертикальных и горизонтальных лифтов, получим разложение ИАП, включающее только лифты горизонтального и горизонтально-векторного типа, а также условия, которым удовлетворяют компоненты ИАП.

1. Основные определения и понятия

Специальные алгебры Вейля, высота и ширина которых равна 2, имеют размерность, равную 4. Поэтому базисные элементы e^0, e^1, e^2, e^3 можно выбрать так, чтобы были справедливы равенства:

$$e^0 = 1, \quad e^1 e^2 = e^1 e^3 = 0, \quad e^2 e^2 = q e^3, \quad q = \pm 1.$$

Обозначим описанные алгебры через $W_4(q)$.

Если задано гладкое многообразие M_n размерности n с линейной связностью без кручения ∇ и алгебра гладких функций класса C^∞ на этом многообразии, а также алгебра Вейля A , то можно построить расслоение Вейля M_n^A над алгеброй Вейля A , а также продолжения функций, векторных и тензорных полей в это расслоение [3].

Пусть (U, x^i) – локальная карта на многообразии M_n , Γ_{ij}^k – коэффициенты линейной связности ∇ в этой карте.

В области $\pi^{-1}(U) \subset M_n^{W_4(q)}$, где $\pi: M_n \rightarrow M_n^{W_4(q)}$ – каноническая проекция, естественные продолжения координатных функций имеют вид

$$(x^i)^{W_4(q)} = x_0^i + x_1^i e^1 + x_2^i e^2 + x_3^i e^3.$$

Координатными функциями в области $\pi^{-1}(U) \subset M_n^{W_4(q)}$ являются функции $x_0^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i$.

Векторные поля $\partial_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$, где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, образуют естественный репер в области $\pi^{-1}(U) \subset M_n^{W_4(q)}$.

Локальные выражения естественных продолжений векторного поля X в расслоения над алгебрами $W_4(q)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 X^{(0)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (X^i)_{(1)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^2 + (X^i)_{(3)} \partial_i^3, \\
 X^{(1)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^1 + (X^i)_{(1)} \partial_i^3, \\
 X^{(2)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^2 + q(X^i)_{(2)} \partial_i^3, \\
 X^{(3)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^3.
 \end{aligned}$$

Локальные выражения горизонтальных продолжений векторного поля X в расслоения над алгебрами $W_4(q)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 X^{H_0} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (X^i)_{(1)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^2 + (X^i)_{(3)} \partial_i^3, \\
 X^{H_1} &= (X^i)_{(0)} \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{il}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^3 \right], \\
 X^{H_2} &= (X^i)_{(0)} \left[\partial_i^1 - q(\Gamma_{il}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^3 \right], \\
 X^{H_3} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^3.
 \end{aligned}$$

Локальные выражения продолжений тензорного поля U типа (1, 1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 U^{H_0\gamma_1} &= (U_l^i)_{(0)} x_1^l \left[\partial_i^0 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left((\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_3^s + \frac{1}{2} (\partial_s \Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ra}^k \Gamma_{si}^a)_{(0)} (x_1^s x_1^r + q x_2^s x_2^r) \right) \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_0\gamma_2} &= (U_l^i)_{(0)} x_2^l \left[\partial_i^0 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left((\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_3^s + \frac{1}{2} (\partial_s \Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ra}^k \Gamma_{si}^a)_{(0)} (x_1^s x_1^r + q x_2^s x_2^r) \right) \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_0\gamma_3} &= (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \left[\partial_i^0 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^1 - \right. \\
 &\quad \left. - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^2 - \left((\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_3^s + \frac{1}{2} (\partial_s \Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ra}^k \Gamma_{si}^a)_{(0)} (x_1^s x_1^r + q x_2^s x_2^r) \right) \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_1\gamma_1} &= (U_l^i)_{(0)} x_1^l \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_1\gamma_2} &= (U_l^i)_{(0)} x_2^l \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_1\gamma_3} &= (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_2\gamma_1} &= (U_l^i)_{(0)} x_1^l \left[\partial_i^2 - q(\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^3 \right], \\
 U^{H_2\gamma_2} &= (U_l^i)_{(0)} x_2^l \left[\partial_i^2 - q(\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^3 \right],
 \end{aligned}$$

$$U^{H_2\gamma_3} = (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \left[\partial_i^2 - q (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^3 \right],$$

$$U^{H_3\gamma_1} = (U_l^i)_{(0)} x_1^l \partial_i^3,$$

$$U^{H_3\gamma_2} = (U_l^i)_{(0)} x_2^l \partial_i^3,$$

$$U^{H_3\gamma_3} = (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \partial_i^3.$$

2. Каноническое представление инфинитезимального аффинного преобразования

В работе [2] было показано, что линейная связность ∇ без кручения на многообразии индуцирует единственную линейную связность ∇^C – полный лифт связности ∇ в расслоения Вейля над алгебрами $W_4(q)$.

Инфинитезимальными аффинными преобразованиями расслоений Вейля над алгебрами $W_4(q)$ являются векторные поля \tilde{X} , удовлетворяющие равенству

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}} \nabla^C = 0. \quad (1)$$

Данное равенство можно записать как систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta \tilde{X}_\sigma^i + \tilde{X}_\tau^m (\partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i}) + (\partial_j^\alpha \tilde{X}_\tau^m) \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} + (\partial_k^\beta \tilde{X}_\tau^m) \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} - (\partial_m^\tau \tilde{X}_\sigma^i) \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} = 0,$$

где индексы α, β, σ являются элементами множества $\{0, 1, 2, 3\}$. По индексу τ выполняется суммирование по элементам того же множества

В работе [2] были получены канонические разложения произвольных инфинитезимальных аффинных преобразований в расслоениях Вейля со связностью полного лифта над алгебрами $W_4(q)$:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & D^{(0)} + H^{(1)} + N^{(2)} + T^{(3)} + A^{H_0\gamma_3} + B^{H_0\gamma_2} + C^{H_0\gamma_1} + E^{H_1\gamma_3} + \\ & + F^{H_1\gamma_2} + \tilde{G}^{H_1\gamma_1} + K^{H_2\gamma_3} + \tilde{L}^{H_2\gamma_2} + M^{H_2\gamma_1} + \tilde{P}^{H_3\gamma_3} + \tilde{Q}^{H_3\gamma_2} + \tilde{S}^{H_3\gamma_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где D, H, N, T – векторные поля; $A, B, C, E, F, \tilde{G}, K, \tilde{L}, M, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}$ – тензорные поля типа $(1, 1)$, заданные на многообразии M_n .

Компоненты ИАП из равенства (2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\nabla_i U_j = 0, \text{ где } U = A, B, C, E, F, \tilde{G}, K, \tilde{L}, M, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}, \quad (3)$$

$$(\mathcal{L}_Z \nabla)_{jk}^i = 0, \text{ где } Z = D, H, N, T, \quad (4)$$

$$V_m^i R_{ljk}^m = V_l^m R_{mkj}^i = V_j^m R_{lkm}^i = 0, \text{ где } V = A, B, C, E, K, \quad (5)$$

$$Y_l^m R_{mjk}^i - V_m^i R_{ljk}^m = 0, \text{ где } Y = F, \tilde{G}, \tilde{L}, M, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}, \quad (6)$$

$$F_l^m R_{mjk}^i + qM_m^i R_{ljk}^m = 0, \quad (7)$$

$$2\tilde{G}_l^m R_{mjk}^i - \tilde{P}_m^i R_{ljk}^m = 0, \quad (8)$$

$$2\tilde{L}_l^m R_{mjk}^i - \tilde{P}_m^i R_{ljk}^m = 0. \quad (9)$$

3. Альтернативное представление инфинитезимального аффинного преобразования

Используя локальные выражения естественных и горизонтальных лифтов векторного поля X можно показать, что

$$X^{(0)} = X^{H_0} + (\nabla X)^{H_1\gamma_1} + (\nabla X)^{H_2\gamma_2} + (\nabla X)^{H_3\gamma_3} + \frac{1}{2}(\nabla^2 X)^{H_3(\gamma_1\gamma_1 + q\gamma_2\gamma_2)},$$

$$X^{(1)} = X^{H_1} + (\nabla X)^{H_3\gamma_1},$$

$$X^{(2)} = X^{H_2} + q(\nabla X)^{H_3\gamma_2},$$

$$X^{(3)} = X^{H_3}.$$

Тогда инфинитезимальное аффинное преобразование (2) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & D^{H_0} + H^{H_1} + N^{H_2} + T^{H_3} + C^{H_0\gamma_1} + B^{H_0\gamma_2} + A^{H_0\gamma_3} + (\tilde{G} + \nabla D)^{H_1\gamma_1} + \\ & + F^{H_1\gamma_2} + E^{H_1\gamma_3} + M^{H_2\gamma_1} + (\tilde{L} + \nabla D)^{H_2\gamma_2} + K^{H_2\gamma_3} + (\tilde{S} + \nabla H)^{H_3\gamma_3} + \\ & + (\tilde{Q} + q\nabla N)^{H_3\gamma_3} + (\tilde{P} + \nabla D)^{H_3\gamma_3} + \frac{1}{2}(\nabla^2 D)^{H_3(\gamma_1\gamma_1 + q\gamma_2\gamma_2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие (1), определяющее инфинитезимальное аффинное преобразование \tilde{X} , можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(\nabla_{\tilde{Y}}^C \tilde{Z}) - \nabla_{\tilde{Y}}^C(\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Z}) - \nabla_{\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}}^C \tilde{Z} = 0.$$

На основании равенств

$$\nabla_{\partial_i^{H_3}}^C \partial_j^{H_\beta} = 0, \quad \beta = 0, 1, 2, 3,$$

$$\nabla_{\partial_i^{H_2}}^C \partial_j^{H_0} = \frac{q}{2}(R_{lij}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^{H_3},$$

$$\nabla_{\partial_i^{H_1}}^C \partial_j^{H_0} = \frac{1}{2}(R_{lij}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^{H_3},$$

$$\nabla_{\partial_i^{H_\alpha}}^C \partial_j^{H_\beta} = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad \beta = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_3} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_3}, \\ \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_2} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_2} + q(R_{lij}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^{H_3}, \\ \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_1} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_1} + (R_{lij}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^{H_3}, \\ \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_0} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_3} + (R_{lij}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^{H_1} + (R_{lij}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^{H_2} + \\ &+ \left[(R_{lij}^k)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{rs}^l)_{(0)} (x_1^r x_1^s + q x_2^r x_2^s) \right) + \frac{1}{2} (\nabla_s R_{lij}^k)_{(0)} (x_1^l x_1^s + q x_2^l x_2^s) \right] \partial_k^{H_3} \end{aligned}$$

можно показать, что условия, которым удовлетворяют компоненты векторных и тензорных полей, входящих в выражение (10), являются следствиями равенств (3)–(9).

Условия, накладываемые на компоненты векторных и тензорных полей в выражении (10), имеют вид

$$(\mathcal{L}_Z \nabla)_{jk}^i = 0, \text{ где } Z = D, H, N, T, \quad (11)$$

$$\nabla_j V_k^i = 0, \text{ где } V = A, B, C, E, F, K, M, \quad (12)$$

$$V_m^i R_{lkj}^m = V_l^m R_{mkj}^i = V_j^m R_{lkm}^i = 0, \text{ где } V = A, B, C, E, K, \quad (13)$$

$$F_l^m R_{mjk}^i + q M_m^i R_{ljk}^m = 0, \quad (14)$$

$$Y_l^m R_{mjk}^i - V_m^i R_{ljk}^m = 0, \text{ где } Y = F, M, \quad (15)$$

$$\nabla_j V_i^k + D^a R_{ajk}^i = 0, \text{ где } V = \tilde{G} + \nabla D, \tilde{L} + \nabla D, \tilde{P} + \nabla D, \quad (16)$$

$$\nabla_j (\tilde{S} + \nabla H)_k^i + H^a R_{ajk}^i = 0, \quad (17)$$

$$2((V + \nabla D)_l^m + \nabla_l D^m) R_{mjk}^i - ((\tilde{P} + \nabla D)_m^i + \nabla_m D^i) R_{ljk}^m = 0, \quad (18)$$

где $V = \tilde{G} + \nabla D, \tilde{L} + \nabla D$,

$$((V + \nabla D)_l^m + \nabla_l D^m) R_{mjk}^i - ((V + \nabla D)_m^i + \nabla_m D^i) R_{ljk}^m = 0, \quad (19)$$

где $V = \tilde{G} + \nabla D, \tilde{L} + \nabla D, \tilde{P} + \nabla D$,

$$((\tilde{S} + \nabla H)_l^m + \nabla_l H^m) R_{mjk}^i - ((\tilde{S} + \nabla H)_m^i + \nabla_m H^i) R_{ljk}^m = 0, \quad (20)$$

$$((\tilde{Q} + q \nabla N)_l^m + \nabla_l N^m) R_{mjk}^i - ((\tilde{Q} + q \nabla N)_m^i + \nabla_m N^i) R_{ljk}^m = 0. \quad (21)$$

Выполнив равносильные преобразования равенств (11)–(21), можно получить равенства (3)–(9).

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Инфинитезимальное аффинное преобразование расслоения Вейля над алгебрами $W_4(q)$, записанное в виде (2), можно представить в форме (10), при этом условия, накладываемые на компоненты выражения (10), определяются равенствами (11)–(21).

Список литературы

1. Вишневецкий В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1984. 264 с.
2. Султанов А. Я. Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Известия высших учебных заведений. Математика. 1999. № 9. С. 64–72.
3. Буданов К. М., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 12. С. 3–13.

References

1. Vishnevskiy V.V., Shirokov A.P., Shurygin V.V. *Prostranstva nad algebrami = Spaces over algebras*. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1984:264. (In Russ.)
2. Sultanov A.Ya. Extensions of tensor fields and connections to Weil bundles. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 1999;(9):64–72. (In Russ.)
3. Budanov K.M., Sultanov A.Ya. Infinitesimal affine transformations of a second-order Weyl bundle with a full lift connection. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 2015;(12):3–13. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Константин Михайлович Буданов
старший преподаватель кафедры
информационно-вычислительных
систем, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

Konstantin M. Budanov
Senior lecturer of the sub-department
of information and computing systems,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

E-mail: ko13bud@rambler.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 22.09.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 02.11.2023

Принята к публикации / Accepted 16.01.2024

Исследование нелинейной математической модели механической системы «трубопровод – датчик давления»

П. А. Вельмисов¹, Ю. А. Тамарова²

¹Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

²Ульяновское конструкторское бюро приборостроения, Ульяновск, Россия

¹velmisov@ulstu.ru, ²kazakovaua@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды является датчик, который поставляет данные о давлении рабочей среды, определяющем надлежащее функционирование машин, механизмов, систем. Увеличение срока службы, уменьшение времени разработки, снижение себестоимости датчиков – первостепенные задачи. В связи с этим важную роль на этапе проектирования систем измерения давления играет математическое моделирование функционирования таких систем. Для измерения и контроля давления рабочей газожидкостной среды в камерах сгорания двигателей используется механическая система «трубопровод – датчик давления», в которой для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик соединен с двигателем с помощью трубопровода и располагается на некотором расстоянии от него. Целью работы является создание математической модели системы «трубопровод – датчик давления» и исследование ее на предмет возможности установления соответствия между законом изменения давления в камере сгорания и законом колебания чувствительного элемента датчика давления. *Материалы и методы.* Для описания движения рабочей среды (в модели идеального газа) используется нелинейная модель механики жидкости и газа в предположении, что рабочая среда сжимаемая. Для описания динамики чувствительного элемента датчика используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одномассовой системы. При указанных предположениях построена математическая модель механической системы «трубопровод – датчик давления». Для решения соответствующей задачи, постановка которой содержит нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными, предложены численно-аналитические методы решения на основе метода Галеркина. *Результаты.* Разработана нелинейная математическая модель системы измерения давления в газожидкостных средах. Для соответствующей начально-краевой задачи на основе метода Галеркина предложен метод, позволяющий свести ее исследование к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведен численный эксперимент и представлены примеры расчета динамики чувствительного элемента датчика. *Выводы.* Предложенная математическая модель позволяет определять закон изменения отклонения чувствительного элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в камере сгорания. Результаты исследований предназначены для использования на этапе проектирования систем измерения давления.

Ключевые слова: датчик давления, трубопровод, чувствительный элемент, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

Для цитирования: Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Исследование нелинейной математической модели механической системы «трубопровод – датчик давления» //

Studying the nonlinear mathematical model of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”

P.A. Velmisov¹, Yu.A. Tamarova²

¹Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

²Ulyanovsk Instrument Engineering Design Bureau, Ulyanovsk, Russia

¹velmisov@ulstu.ru, ²kazakovaua@mail.ru

Abstract. *Background.* The primary element of the instrumentation for measuring the pressure of a gas-liquid medium is a sensor that supplies data on the pressure of the working medium, which determines the proper functioning of machines, mechanisms, and systems. Increasing the service life, reducing development time, and reducing the cost of sensors are one of the primary objectives. In this regard, mathematical modeling of the functioning of such systems plays an important role at the design stage of pressure measurement systems. To measure and control the pressure of the working gas-liquid medium in the combustion chambers of engines, a mechanical system “pipeline - pressure sensor” is used, in which, to reduce the effects of vibration accelerations and high temperatures, the sensor is connected to the engine via a pipeline and is located at some distance from it. The purpose of the work is to create a mathematical model of the “pipeline - pressure sensor” system and study it for the possibility of establishing a correspondence between the law of pressure change in the combustion chamber and the law of oscillation of the sensitive element of the pressure sensor. *Materials and methods.* To describe the movement of the working medium (in the ideal gas model), a nonlinear model of fluid and gas mechanics is used, under the assumption that the working medium is compressible. To describe the dynamics of the sensitive element of the sensor, a model is used, the basis of which is an ordinary differential equation that describes the oscillatory process of a single-mass system. Under these assumptions, a mathematical model of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” was constructed. To solve the corresponding problem, the formulation of which contains a nonlinear partial differential equation, numerical and analytical solution methods based on the Galerkin method are proposed. *Results.* A nonlinear mathematical model of a system for measuring pressure in gas-liquid media has been developed. For the corresponding initial-boundary value problem, based on the Galerkin method, a method is proposed that makes it possible to reduce its study to solving the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. A numerical experiment is carried out and examples of calculating the dynamics of the sensor's sensitive element are presented. *Conclusions.* The proposed mathematical model makes it possible to determine the law of change in the deviation of the sensor's sensitive element depending on the law of change in pressure in the combustion chamber. The research results are intended for use at the design stage of pressure measurement systems.

Keywords: pressure sensor, pipeline, sensitive element, dynamics, differential equations, Galerkin method

Financing: the research was financed by the RSF within the research project No. 23-21-00517.

For citation: Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Studying the nonlinear mathematical model of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):24–37. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-3

Введение

Во многих отраслях науки и техники, в том числе аэрокосмической, возникает проблема повышения надежности и долговечности конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа. В частности, такая проблема возникает при проектировании датчиков давления газожидкостных сред. В связи с этим возникает задача исследования динамики и устойчивости колебаний деформируемых элементов конструкций, так как воздействие потока может приводить к значениям амплитуды, скорости и ускорений колебаний, не позволяющим осуществлять их надежную эксплуатацию и обеспечивать необходимую функциональную точность. Развитие авиационной, ракетно-космической и другой техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления, характеризующихся экстремными условиями эксплуатации. Описанию датчиков измерительных систем, принципов их работы, технических характеристик посвящено много работ, например [1–6].

Все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. При размещении датчиков давления непосредственно на двигателе на них воздействуют широкие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений и в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. В работе [7] предложено решение задачи уменьшения влияния температур на тонкопленочные нано- и микроэлектромеханические системы датчиков давления. В работе [8] рассмотрены вопросы повышения вибростойкости тонкопленочных нано- и микросистем и датчиков давления на их основе. В монографии [9] представлена совокупность некоторых моделей и методов исследования механической системы «трубопровод – датчик давления». В случае несжимаемости рабочей среды математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в статьях [10, 11]. В работах [12–14] исследуется взаимодействие упругих тел с вязкой несжимаемой жидкостью. Исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» для сжимаемой рабочей среды представлены, например, в работах [15, 16].

В данной статье на основе одномерной нелинейной модели, представляющей собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Для описания движения рабочей среды применяется нелинейная модель механики жидкости и газа [17]. Исследование указанной начально-краевой задачи с помощью метода Галеркина [18, 19] сведено к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработана программа в системе Mathematica 12.0, позволяющая получать графики деформации чувствительного элемента датчика (отклик) при различном задании закона изменения давления рабочей среды (входной сигнал). Отметим, что задачи восстановления входных сигналов в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами, в том числе входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударном воздействии, рассматриваются в [20, 21].

1. Постановка задачи

Рассмотрим схему механической системы «трубопровод – датчик давления» (рис. 1), где в начальном сечении $x=0$ трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$ (P_0 – давление в состоянии покоя, $P_*(t)$ – избыточное давление). Состоянию покоя соответствует положение $x=l$ поршня, являющегося составной частью датчика давления и закрепленного с помощью системы упругих связей и демпферов. Отклонение поршня от положения равновесия обозначим $w(t)$. Поставим целью получить уравнение, связывающее закон изменения давления в двигателе $P_*(t)$ (входной сигнал) с величиной перемещения поршня $w(t)$ (отклик) в любой момент времени t .

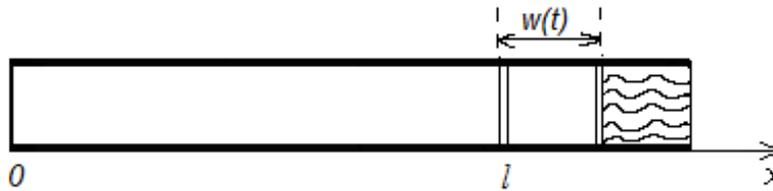


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»

Математическую модель рассматриваемой механической системы представим в виде

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad (1)$$

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2)$$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (3)$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + f(\dot{w}(t), w(t)) = P(l_*(t), t), \quad (4)$$

где $\Phi(x, t)$ – потенциал скорости; $P(x, t)$ – давление в рабочей среде (в жидкости или газе); a_0 – скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды; χ – коэффициент Пуассона; m – масса чувствительного элемента.

Уравнения (1), (4) следует дополнить начальными условиями. Эти условия будут записаны при решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой будет сведено решение задачи (1)–(4).

Уравнение (1) для потенциала скорости $\Phi(x, t)$ описывает движение рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе; условие (2) задает закон изменения давления $P_*(t)$ рабочей среды в камере сгорания; условие (3) – условие непротекания на поверхности поршня; уравнение (4) описывает движение поршня. Линейная или нелинейная функция $f(\dot{w}(t), w(t))$ является характеристикой вязкоупругого основания (системы упругих связей и демпферов). Давление в потоке определяется интегралом Лагранжа – Коши:

$$P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (5)$$

Учитывая (5), условие (2) можно записать в виде

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right)_{x=0} = \psi(t) = \frac{a_0^2}{\chi - 1} \left[1 - \left(1 + \frac{P_*(t)}{P_0} \right)^{\frac{\chi - 1}{\chi}} \right]. \quad (6)$$

2. Некоторые способы решения задачи

Введем функции $u = \Phi_x$, $v = \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2$, тогда уравнения, представляющие математическую модель, имеют вид

$$v_t + uv_x - \left[a_0^2 - (\chi - 1)v \right] u_x = 0, \quad (7)$$

$$v_x - u_t - uu_x = 0, \quad (8)$$

$$v(0, t) = \psi(t), \quad (9)$$

$$u(l_*, t) = \dot{w}(t), l_* = l + w(t), \quad (10)$$

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} v(l_*, t) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (11)$$

А. Для решения задачи (7)–(11) применим метод Галеркина [18, 19]. С учетом граничных условий (9), (10), используя в качестве пробных функций $(l_* - x)^n$, x^n , будем искать $u(x, t)$, $v(x, t)$ в виде отрезков степенных рядов:

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t) (l_* - x)^n, \quad (12)$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^N v_k(t) x^k. \quad (13)$$

Подставив (12), (13) в (7), (8) и записав условия ортогональности полученных невязок к функциям $\{\theta_n(x)\}$, образующих на $[0, l_*]$ полную систему, получим $2N$ уравнений для $(2N + 1)$ функции $w(t), u_1(t), \dots, u_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t)$. К полученным уравнениям следует добавить уравнение (11). В силу граничных условий (9), (10) в качестве поверочных функций $\theta_n(x)$ можно выбрать, например, следующие:

$$\theta_n(x) = x(l_* - x)^n, \theta_n(x) = x^n(l_* - x), \theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_*}x\right), n = 1 \div \infty. \quad (14)$$

Рассмотрим второе приближение ($N = 2$), тогда

$$u(x,t) = \dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x) + u_2(t)(l_* - x)^2, \quad v(x,t) = \psi(t) + v_1(t)x + v_2(t)x^2. \quad (15)$$

Подставив (15) в уравнения (7), (8), получим

$$\begin{aligned} & v_1(t) - \ddot{w}(t) + 2v_2(t)x + (l_* - x) \left[u_1^2(t) - \dot{u}_1(t) \right] + \\ & + (l_* - x)^2 [-\dot{u}_2(t) + 3u_1(t)u_2(t)] + 2(l_* - x)^3 u_2^2(t) = 0, \\ & \dot{\psi}(t) + \dot{w}(t)v_1(t) + (a_0^2 - (\chi - 1)\psi(t))u_1(t) + x^2 [\dot{v}_2(t) - (\chi - 1)v_2(t)u_1(t)] + \\ & + (l_* - x) [u_1(t)v_1(t) + 2u_2(t)(a_0^2 - (\chi - 1)\psi(t))] + 2x(l_* - x)^2 v_2(t)u_2(t) + \\ & + (l_* - x)^2 u_2(t)v_1(t) + 2x(l_* - x)(u_1(t)v_2(t) - (\chi - 1)v_1(t)u_2(t)) - \\ & - 2x^2(l_* - x)(\chi - 1)v_2(t)u_2(t) + x [\dot{v}_1(t) + 2v_2(t)\dot{w}(t) - (\chi - 1)v_1(t)u_1(t)] = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Предположим, что $L(w)$ задана линейным выражением: $L(w) = m\dot{w} + \alpha w + \gamma w$, где α , γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда с учетом (15) уравнение (11) принимает вид

$$m\dot{w} + \alpha w + \gamma w = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + v_1(t)l_* + v_2(t)l_*^2) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (17)$$

Записывая согласно методу Галеркина условия ортогональности невязок уравнений (16) к базисным функциям $x(l_* - x)$, $x^2(l_* - x)$, получим четыре уравнения:

$$\begin{aligned} & 10(\dot{\psi} + \dot{w}v_1 + u_1(a_0^2 - (\chi - 1)\psi)) + 5l_* \left[\dot{v}_1 + 2v_2\dot{w} - (\chi - 2)u_1v_1 + 2u_2(a_0^2 - (\chi - 1)\psi) \right] + \\ & + l_*^2 (3\dot{v}_2 + (7 - 3\chi)u_1v_2 + (7 - 4\chi)u_2v_1) + 2l_*^3 (2 - \chi)u_2v_2 = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 35(\dot{\psi} + \dot{w}v_1 + u_1(a_0^2 - (\chi - 1)\psi)) + 7l_* \left[3\dot{v}_1 + 6v_2\dot{w} + (5 - 3\chi)u_1v_1 + 4u_2(a_0^2 - (\chi - 1)\psi) \right] + \\ & + 7l_*^2 (2\dot{v}_2 - 2(\chi - 2)u_1v_2 + (3 - 2\chi)u_2v_1) + 2l_*^3 (7 - 4\chi)u_2v_2 = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

$$10(v_1 - \ddot{w}) + 5l_* [2v_2 - \dot{u}_1 + u_1^2] + 3l_*^2 (-\dot{u}_2 + 3u_1u_2) + 4l_*^3 u_2^2 = 0, \quad (20)$$

$$35(v_1 - \ddot{w}) + 14l_* [3v_2 - \dot{u}_1 + u_1^2] + 7l_*^2 (-\dot{u}_2 + 3u_1u_2) + 8l_*^3 u_2^2 = 0. \quad (21)$$

Система пяти уравнений (17)–(21) служит для определения пяти функций $w(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента.

Б. Другой способ решения задачи состоит в задании $u(x,t)$ в виде (12) и последующем определении $v(x,t)$ из уравнения (8), при этом уравнение (8)

удовлетворяется точно, а уравнение (7) – приближенно с помощью метода Галеркина.

Подставляя

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n$$

в (8), получим

$$v_x = \ddot{w}(t) + \sum_{n=1}^N \dot{u}_n(t)(l_* - x)^n + \sum_{n=1}^N n u_n(t) \dot{w}(t)(l_* - x)^{n-1} + \frac{1}{2} (u^2)_x.$$

Интегрируя по переменной x , будем иметь

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_0(t) + \ddot{w}(t)x - \sum_{n=1}^N \frac{\dot{u}_n(t)(l_* - x)^{n+1}}{n+1} - \\ &- \sum_{n=1}^N u_n(t) \dot{w}(t)(l_* - x)^n + \frac{1}{2} \left[\dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n \right]^2 = \\ &= v_0(t) + \ddot{w}(t)x - \sum_{n=1}^N \frac{\dot{u}_n(t)}{n+1} (l_* - x)^{n+1} + \frac{1}{2} \dot{w}^2(t) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n \right)^2. \end{aligned}$$

Удовлетворяя условию (9), находим

$$v_0(t) = \psi(t) + \sum_{n=1}^N \frac{\dot{u}_n(t)}{n+1} l_*^{n+1} - \frac{1}{2} \dot{w}^2(t) - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N u_n(t) l_*^n \right)^2.$$

Таким образом, функция $v(x, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \psi(t) + \ddot{w}(t)x - \sum_{n=1}^N \frac{\dot{u}_n(t)(l_* - x)^{n+1}}{n+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N u_n(t) l_*^n \right)^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\dot{u}_n(t)}{n+1} l_*^{n+1}. \end{aligned}$$

Уравнение (11) будет иметь вид

$$L(w) = P_0 \left\{ 1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left[\psi(t) + \ddot{w}(t)l_* + \sum_{n=1}^N \frac{\dot{u}_n(t)}{n+1} l_*^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N u_n(t) l_*^n \right)^2 \right] \right\}^{\frac{\chi}{\chi-1}}.$$

Например, в случае $N=1$ имеем

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x),$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \dot{w}(t)x - \frac{1}{2}[\dot{u}_1(t) - u_1^2(t)](l_* - x)^2 + \frac{1}{2}[\dot{u}_1(t) - u_1^2(t)]l_*^2.$$

При этом уравнение (11) запишется в виде

$$L(w) = P_0 \left\{ 1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left[\psi(t) + \dot{w}(t)l_* + \frac{1}{2}\dot{u}_1(t)l_*^2 - \frac{1}{2}u_1^2(t)l_*^2 \right] \right\}^{\frac{\chi}{\chi - 1}}.$$

Далее следует подставить u и v в уравнение (7) и записать условие ортогональности полученной невязки к базисной функции $x(l_* - x)$. Получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w(t)$, $u_1(t)$.

3. Тепловая задача

Математическая постановка тепловой задачи для механической системы «трубопровод – датчик давления» с учетом движения рабочей среды в случае, когда стенки трубопровода и чувствительный элемент датчика теплоизолированы, имеет вид

$$\begin{cases} \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ T(0, t) = T_*(t), \\ \frac{\partial T}{\partial x}(l_*, t) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где $T(x, t)$ – закон изменения температуры рабочей среды; $T_*(t)$ – закон изменения температуры на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания); k – коэффициент теплопроводности среды; ρ – плотность среды; c – коэффициент теплоемкости среды.

Функцию $T(x, t)$, учитывая граничные условия системы (22), представим в виде

$$T(x, t) = T_*(t) + \sum_{n=2}^{N+1} T_{n-1}(t) (x^n - nl_*^{n-1}x). \quad (23)$$

Рассмотрим случай $N = 2$, тогда

$$T(x, t) = T_*(t) + T_1(t) (x^2 - 2l_*x) + T_2(t) (x^3 - 3l_*^2x). \quad (24)$$

Подставляя (24), (15) в первое уравнение системы (22), получим

$$\begin{aligned} & \dot{T}_*(t) + \dot{T}_1(t) (x^2 - 2l_*x) - 2\dot{T}_1(t)x\dot{w}(t) + \dot{T}_2(t) (x^3 - 3l_*^2x) - \\ & - 6T_2(t)l_*x\dot{w}(t) + (\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x) + u_2(t)(l_* - x)^2) \times \\ & \times (2T_1(t)(x - l_*) + 3T_2(t)(x^2 - l_*^2)) = \frac{2k}{\rho c} (T_1(t) + 3T_2(t)x). \end{aligned}$$

Умножая полученную невязку на $x(l_* - x)$, $x^2(l_* - x)$ и интегрируя в пределах от 0 до l_* , получим два уравнения:

$$70\dot{T}_* - 49l_*^2\dot{T}_1 - 91l_*^3\dot{T}_2 - 140l_*T_1\dot{w} - 357l_*^2T_2\dot{w} - 42l_*^2u_1T_1 - 28l_*^3u_2T_1 - 84l_*^3u_1T_2 - 54l_*^4u_2T_2 - \frac{k}{\rho c}(140T_1 + 210l_*T_2) = 0, \quad (25)$$

$$70\dot{T}_* - 56l_*^2\dot{T}_1 - 106l_*^3\dot{T}_2 - 140l_*T_1\dot{w} - 378l_*^2T_2\dot{w} - 28l_*^2u_1T_1 - 16l_*^3u_2T_1 - 60l_*^3u_1T_2 - 33l_*^4u_2T_2 - \frac{k}{\rho c}(140T_1 + 252l_*T_2) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, система семи уравнений (17)–(21), (25), (26) служит для определения семи функций $w(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, $T_1(t)$, $T_2(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента. Для решения в пакете Mathematica 12.0 система уравнений (17)–(21), (25), (26) была приведена к нормальному виду и решалась при нулевых начальных условиях: $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = 0$, $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, $T_1(0) = 0$, $T_2(0) = 0$, что соответствует невозмущенному состоянию системы (состоянию покоя) в начальный момент времени.

4. Численный эксперимент

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – воздух ($\rho = 1,225$). Другие параметры механической системы: $c = 1,005$; $k = 0,022$; $P_0 = 101325$; $m = 0,01$; $a_0 = 332$; $\chi = 1,5$; $l = 3$; $\alpha = 10^8$; $\gamma = 10^9$ (все значения приведены в системе СИ). На рис. 2 и 3 представлены примеры численных расчетов при различном задании функций $P_*(t)$, $T_*(t)$.

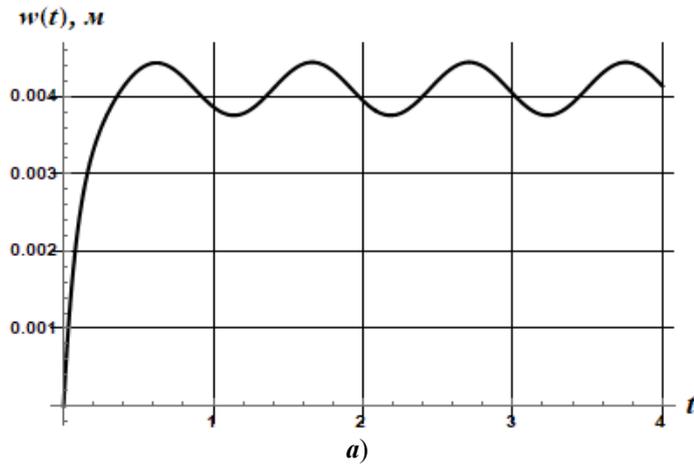


Рис. 2. Результаты численного эксперимента при $P_*(t) = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^5 \cos 6t$, $T_*(t) = 1226 - 20 \cos 6t$: a – отклонение поршня от положения равновесия; b – температура рабочей среды в точке $x = l_*$

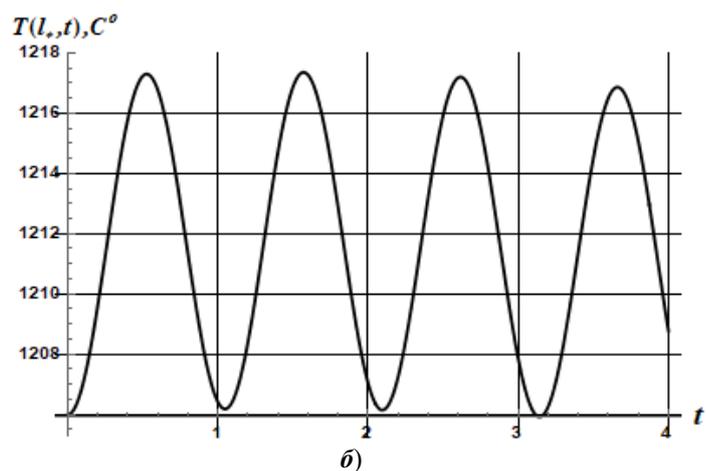


Рис. 2. Окончание

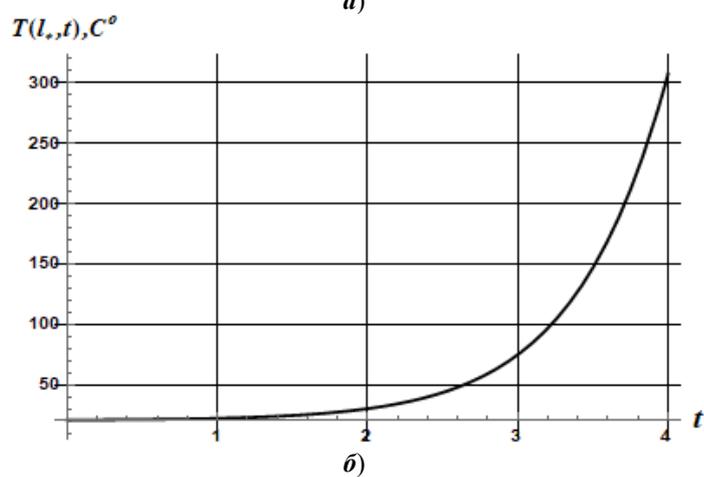
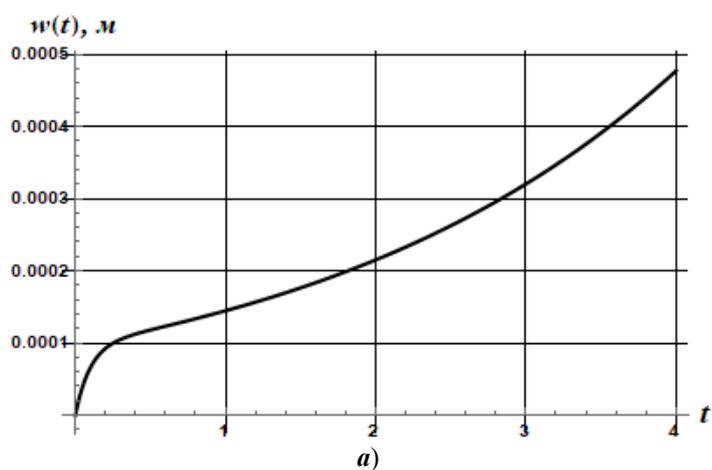


Рис. 3. Результаты численного эксперимента при $P_*(t) = 10^5 (e^{0,4t} - 1)$,
 $T_*(t) = 20 + e^{1,8t}$: a – отклонение поршня от положения равновесия;
 $\bar{\theta}$ – температура рабочей среды в точке $x = l_*$

Заключение

Предложена и исследована математическая модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для контроля давления в камере сгорания. С помощью метода Галеркина построены решения соответствующей начально-краевой задачи. Проведен численный эксперимент и получены графики перемещения чувствительного элемента датчика и температуры рабочей среды при различном задании законов изменения давления рабочей среды и температуры на входе в трубопровод.

Список литературы

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
2. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж. [и др.]. Датчики измерительных систем : в 2 кн. / пер. с фр. А. С. Обухова. М. : Мир, 1992.
3. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М. : Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
4. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
5. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. 2-е изд. М. : Машиностроение, 1981. 392 с.
6. Датчики. Преобразователи. Системы : каталог. Пенза : Федеральный научно-производственный центр ФГУП НИИ физических измерений, 2012.
7. Белозубов Е. М., Васильев В. А., Громков Н. В. Уменьшение влияния температур на тонкоплёночные нано- и микроэлектромеханические системы датчиков давления // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2009. Т. 1. С. 386–390.
8. Белозубов Е. М., Белозубова Н. Е. Повышение стойкости тонкоплёночных нано- и микросистем и датчиков давления на их основе к воздействию повышенных виброускорений // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2011. Т. 2. С. 426–429.
9. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск : УлГТУ. 2018. 152 с.
10. Velmiso P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353, № 012085. P. 1–6. doi: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085
11. Velmiso P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. P. 030006. doi: 10.1063/1.5133495.
12. Могилевич Л. И., Кондратов Д. В., Кондратова Т. С., Иванов С. В. Математическое моделирование волн деформации в двух соосных, кубически нелинейных оболочках, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью // Математическое моделирование, компьютерный и натуральный эксперимент в естественных науках. 2020. № 4. С. 1–15
13. Блинков Ю. А., Евдокимова Е. В., Могилевич Л. И., Ребрина А. Ю. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окруженных упругой средой // Вестник РУДН. Серия МИФ. 2018. Т. 26, № 3. С. 203–215.
14. Землянхун А. И., Иванов С. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Блинков А. Ю. Математическая модель для исследования нелинейных волн в упругой цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой // Прикладная математика и механика (Ульяновск). 2014. № 10. С. 80–83.

15. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Труды Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367.
16. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Труды Средневолжского математического общества. Саранск, 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.
17. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Изд-во Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1987. 823 с.
18. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М. : Изд-во Мир, 1988. 353 с.
19. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Изд-во, 1978. 512 с.
20. Бойков И. В., Кривулин Н. П., Абрамов С. В., Маланин В. П., Кикот В. В. Восстановление входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях // Измерительная техника. 2018. № 11. С. 61–67. doi: 10.32446/0368-1025it.2018-61-67
21. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. 398 с.

References

1. Etkin L.G. *Vibrochastotnye datchiki. Teoriya i praktika = Vibration frequency sensors. Theory and practice.* Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2004:408. (In Russ.)
2. Ash Zh., Andre P., Bofron Zh. et al. *Datchiki izmeritel'nykh sistem: v 2 kn. = Measuring system sensors: in 2 books.* Translated from French A.S. Obukhov. Moscow: Mir, 1992. (In Russ.)
3. Ageykin D.I., Kostina E.N., Kuznetsova N.N. *Datchiki kontrolya i regulirovaniya = Control and regulation sensors.* Moscow: N. Mashinostroenie, 1965:928. (In Russ.)
4. Korsunov V.P. *Uprugie chuvstvitel'nye element = Elastic sensitive element.* Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 1980:264. (In Russ.)
5. Andreeva L.E. *Uprugie elementy priborov. 2-e izd. = Elastic elements of devices. The 2nd edition.* Moscow: Mashinostroenie, 1981:392. (In Russ.)
6. *Datchiki. Preobrazovateli. Sistemy: katalog = Sensors. Converters. Systems: catalog.* Penza: Federal'nyy nauchno-proizvodstvennyy tsentr FGUP NII fizicheskikh izmereniy, 2012. (In Russ.)
7. Belozubov E.M., Vasil'ev V.A., Gromkov N.V. Reducing the influence of temperatures on thin-film nano- and microelectromechanical pressure sensor systems. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International symposium Reliability and Quality.* 2009;1:386–390. (In Russ.)
8. Belozubov E.M., Belozubova N.E. Increasing the resistance of thin-film nano- and microsystems and pressure sensors based on them to the effects of increased vibration accelerations. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International symposium Reliability and Quality.* 2011;2:426–429. (In Russ.)
9. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. *Issledovanie dinamiki deformiruemyykh elementov nekotorykh aerogidrouprugikh system = Studying the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems.* Ul'yanovsk: UIGTU. 2018:152. (In Russ.)
10. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system. *Journal of Physics: Conference Series.* 2019;1353(012085):1–6. doi: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085
11. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V., Mizher U.J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”. *AIP Conference Proceedings.* 2019;2172:030006. doi: 10.1063/1.5133495.
12. Mogilevich L.I., Kondratov D.V., Kondratova T.S., Ivanov S.V. Mathematical modelling of deformation waves in two coaxial, cubically nonlinear shells interacting with the

- environment and filled with liquid. *Matematicheskoe modelirovanie, kompyuternyy i naturnyy eksperiment v estestvennykh naukakh = Mathematical modeling, computer and natural experiment in natural sciences*. 2020;(4):1–15. (In Russ.)
13. Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Rebrina A.Yu. Modeling of wave processes in two coaxial shells filled with a viscous fluid and surrounded by an elastic medium. *Vestnik RUDN. Seriya MIF = Bulletin of RUDN. Series: Mathematics, computer science, physics*. 2018;26(3):203–215. (In Russ.)
 14. Zemlyanukhin A.I., Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Blinkov A.Yu. Mathematical model for studying nonlinear waves in an elastic cylindrical shell surrounded by an elastic medium. *Prikladnaya matematika i mekhanika (Ulyanovsk) = Applied mathematics and mechanics (Ulyanovsk)*. 2014;(10):80–83. (In Russ.)
 15. Vel'misov P.A., Tamarova Yu.A. Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media. *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Proceedings of the Middle Volga mathematical society*. Saransk, 2020;22(3):352–367. (In Russ.)
 16. Vel'misov P.A., Tamarova Yu. A., Aleksanin N.D., Nurullin N.I. Studying the dynamic processes in systems for measuring pressure of gas-liquid media. *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Proceedings of the Middle Volga mathematical society*. Saransk, 2021;23(4):461–471. (In Russ.)
 17. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza = Mechanics of fluid and gas*. Moscow: Izd-vo Nauka. Gl. red. fiz.-mat. Lit., 1987:823. (In Russ.)
 18. Fletcher K. *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina = Numerical methods based on the Galerkin method*. Moscow: Izd-vo Mir, 1988:353. (In Russ.)
 19. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody = Numerical methods*. Moscow: Izd-vo, 1978:512. (In Russ.)
 20. Boykov I.V., Krivulin N.P., Abramov S.V., Malanin V.P., Kikot V.V. Restoration of input signals of eddy current displacement transducers under thermal shock influences. *Izmeritel'naya tekhnika = Measuring technology*. 2018;(11):61–67. (In Russ.). doi: 10.32446/0368-1025it.2018-61-67
 21. Boykov I.V., Krivulin N.P. *Analiticheskie i chislennyye metody identifikatsii dinamicheskikh system = Analytical and numerical methods for identifying dynamic systems*. Penza: Izd-vo PGU, 2016:398. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Петр Александрович Вельмисов

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры высшей
математики, Ульяновский
государственный технический
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Северный Венец, 32)

E-mail: velmisov@ulstu.ru

Petr A. Velmisov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, professor of the
sub-department of higher mathematics,
Ulyanovsk State Technical University
(32 Severniy Venets street,
Ulyanovsk, Russia)

Юлия Александровна Тамарова

начальник ТКБ-512 научно-
исследовательского отдела 51,
Ульяновское конструкторское бюро
приборостроения (Россия, г. Ульяновск,
ул. Крымова, 10А)

E-mail: kazakovaua@mail.ru

Yulia A. Tamarova

Head of the thematic complex team 512
of the Research Department 51, Ulyanovsk
Instrument Engineering Design Bureau
(10A Krimova street, Ulyanovsk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 01.10.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 16.11.2023

Принята к публикации / Accepted 07.12.2023

УДК 517.927.2

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред

Ю. Г. Смирнов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача о разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред. *Материалы и методы.* Применен метод квадратичных форм для анализа операторов задачи. *Результаты и выводы.* Доказана непрерывная обратимость оператора уравнения электрического поля в случае плоских экранов и непоглощающих сред.

Ключевые слова: интегральное уравнение, непоглощающая среда, разрешимость задачи

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20087).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г. О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 38–50. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

On the solvability of the integral electric field equation for nonabsorbing media

Yu.G. Smirnov

Penza State University, Penza, Russia

mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The problem of solvability of the electric field integral equation for non-absorbing media is considered. *Materials and methods.* The method of quadratic forms is applied to investigation of the operators of the problem. *Results and conclusions.* The study proves the continuous reversibility of the operator of the electric field equation in the case of plane screens and nonabsorbing media.

Keywords: integral equation, non-absorbing medium, solvability of the problem

Financing: the research was financed by the RSF (project No. 20-11-20087).

For citation: Smirnov Yu.G. On the solvability of the integral electric field equation for nonabsorbing media. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):38–50. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

Введение

Наиболее естественный подход к решению задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем тонком ограниченном экране – сведение ее к решению интегрального уравнения электрического поля (electric

field integral equation – EFIE) на экране [1]. По-видимому, впервые это уравнение было получено А. Мауэ в 1949 г. [2]. Точнее, это векторное интегро-дифференциальное уравнение, которое имеет вид

$$Lu := \text{grad}_\tau A(\text{div } u) + k^2 A_\tau u = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где div – операция «поверхностной» дивергенции; A – интегральный оператор,

$$A_\tau u = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds, \quad (2)$$

u – касательное к поверхности экрана Ω векторное поле (плотность поверхностного тока). Индекс τ в (1), (2) показывает взятие касательных компонент к Ω соответствующего поля.

Центральной проблемой при исследовании разрешимости уравнения (1) является выбор пространств для решений и для правых частей таким образом, чтобы обеспечить фредгольмовость (и, если удастся, однозначную разрешимость) этого уравнения в выбранных пространствах. Кроме того, пространство решений должно быть достаточно широким и содержать все физически допустимые поля. Такие пространства $W(\bar{\Omega})$ впервые были предложены в [3, 4] и позднее стали использоваться во всем мире при решении задач дифракции на экранах (в зарубежных публикациях они обычно обозначаются как $H_{\text{div}}^{-1/2}(\bar{\Omega})$).

Изучение уравнения (1) было начато уже в работе А. Мауэ [2]. Позднее в фундаментальной монографии [1] была доказана теорема единственности для решений уравнения (1) (и краевой задачи дифракции), исследовано поведение дифракционных полей на бесконечности и в окрестности гладкого края экрана, получены аналитические решения задач дифракции на тонком диске и на сфере.

Подробно интегральное уравнение электрического поля было исследовано в [3–7]. Основная трудность при обосновании применимости численного метода для решения уравнения состоит в том, что, как доказано в [3–7], оператор уравнения не является эллиптическим, поэтому известные результаты о сходимости проекционных методов для решения уравнений с эллиптическими операторами [8, 9] непосредственно нельзя применить. Более того, доказано [10], что свойства аппроксимации для базисных функций недостаточно для сходимости проекционного метода, если оператор уравнения неэллиптический.

Далее будет показано, что в случае непоглощающей среды интегральное уравнение электрического поля не будет эллиптическим, но, тем не менее, оператор уравнения будет непрерывно обратимым. В статье рассматривается только случай плоского экрана.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$,

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i, \quad \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset \quad (i \neq j) -$$

объединение конечного числа непересекающихся областей в \mathbf{R}^2 . Пусть граница $\partial\Omega_j = \bar{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ области Ω_j есть кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞ , сходящихся под углами, отличными от нулевого: $\Gamma = \partial\Omega = \bigcup_j \partial\Omega_j$.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (EFIE):

$$\text{grad } A(\text{div } u) + k^2 Au = f, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$Au = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy, \quad (4)$$

где $u = u(x) = (u_1, u_2)^T$, $x = (x_1, x_2)$, а операции «поверхностной дивергенции и градиента» определены так:

$$\text{div } u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} e_2;$$

e_1, e_2 – орты декартовой системы координат в \mathbf{R}^2 .

Будем считать, что $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Это условие выполняется, если источники электромагнитного поля не лежат на поверхности экрана. Будем рассматривать случай непроводящей среды: $\text{Im } k = 0$, $k > 0$.

Для удобства исследования уравнения выполним преобразование переменных $x'_1 := kx_1, x'_2 := kx_2$ (переход к безразмерным переменным [7]), и, опуская штрих и сохраняя прежние обозначения для переменной, неизвестной функции, области и правой части, получим

$$\text{grad } A(\text{div } u) + Au = f, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$Au = \int_{\Omega} \frac{e^{i|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy. \quad (6)$$

Все результаты о разрешимости уравнения (5), (6), очевидно, будут справедливы и для уравнения (3), (4).

2. Пространства $W(\mathbf{R}^2)$ и $W(\bar{\Omega})$

Определим скалярное произведение и норму в пространстве Соболева $H^s(\mathbf{R}^2)$ обычным образом [11]:

$$(u, v)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = (u, u)_s; \quad \langle \xi \rangle := (1 + \xi^2)^{1/2}, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Через \hat{u} обозначено преобразование Фурье распределения u . Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по \mathbf{R}^2 . В дальнейшем нас будут интересовать главным образом пространства вектор-функций, поэтому через u , v будем обозначать векторы $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$ и т.д. При этом в записи $u \in H^s$ символ H^s уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой:

$$(u, v)_s = (u_1, v_1)_s + (u_2, v_2)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = \|u_1\|_s^2 + \|u_2\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств в векторном случае, так как во всех ситуациях из контекста ясно, о каком пространстве идет речь.

Положим для любого $s \in \mathbf{R}$ [11]:

$$H^s(\Omega) := \{u|_{\Omega} : u \in H^s(\mathbf{R}^2)\}; \quad \tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \{u \in H^s(\mathbf{R}^2) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\}.$$

Пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ может быть получено замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_s$.

Определим гильбертово пространство $W(\mathbf{R}^2)$ как пополнение $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ (гладких функций с компактным носителем) по норме $\|\cdot\|_W$

$$\|u\|_W^2 = \int \langle \xi \rangle^{-1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \langle \xi \rangle^{-1} |\xi \cdot \hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_W = \int \langle \xi \rangle^{-1} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int \langle \xi \rangle^{-1} (\xi \cdot \hat{u}(\xi)) (\overline{\xi \cdot \hat{v}(\xi)}) d\xi.$$

Далее, следуя [3, 4], определим гильбертово пространство $W(\bar{\Omega})$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по той же норме $\|\cdot\|_W$.

Следующие предложения описывают свойства пространств $W(\mathbf{R}^2)$ и $W(\bar{\Omega})$ [3–7].

Утверждение 1:

$$W(\mathbf{R}^2) = \left\{ u \in H^{-1/2}(\mathbf{R}^2) : \text{div } u \in H^{-1/2}(\mathbf{R}^2) \right\}.$$

Утверждение 2:

$$W(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) : \text{div } u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \right\}.$$

Утверждение 3. Имеют место непрерывные вложения:

$$\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \subset W(\bar{\Omega}) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}),$$

и оценки норм

$$\|u\|_{-1/2} \leq \|u\|_W \leq C_0 \|u\|_{1/2}. \quad (7)$$

Пусть $\xi' := (\xi_2, -\xi_1)$. Определим пространства $W_1(\mathbf{R}^2)$ и $W_2(\mathbf{R}^2)$ как подпространства $W(\mathbf{R}^2)$ с условиями:

$$W_1(\mathbf{R}^2) := \left\{ u \in W(\mathbf{R}^2) : \xi \cdot \hat{u}(\xi) = 0 \right\},$$

$$W_2(\mathbf{R}^2) := \left\{ u \in W(\mathbf{R}^2) : \xi' \cdot \hat{u}(\xi) = 0 \right\}.$$

В формулах выше равенства нулю можно понимать как равенство функций из $L_2(\mathbf{R}^2)$ с весом $\langle \xi \rangle^{-1}$, т.е. с точностью до эквивалентных функций.

Утверждение 4. Пространство $W(\mathbf{R}^2)$ разлагается в прямую сумму (замкнутых) ортогональных подпространств:

$$W(\mathbf{R}^2) = W_1(\mathbf{R}^2) \oplus W_2(\mathbf{R}^2).$$

Доказательство. Пусть $u = g + h$, $g \in W_1(\mathbf{R}^2)$, $h \in W_2(\mathbf{R}^2)$. Тогда $\hat{u} = \hat{g} + \hat{h}$, $\xi \cdot \hat{g} = 0$, $\xi' \cdot \hat{h} = 0$. Эта система уравнений имеет единственное решение $\hat{g} = \xi |\xi|^{-2} (\xi' \cdot \hat{u})$, $\hat{h} = \xi' |\xi|^{-2} (\xi \cdot \hat{u})$. Функции g и h находятся с помощью обратного преобразования Фурье. Нетрудно видеть, что функции g и h ортогональны и принадлежат $W(\mathbf{R}^2)$, так как $|\hat{g}| \leq |\hat{u}|$, $|\hat{h}| \leq |\hat{u}|$.

Утверждение 5. $W(\bar{\Omega})$ есть замкнутое подпространство пространства $W(\mathbf{R}^2)$, $W(\bar{\Omega}) \subset W(\mathbf{R}^2)$.

3. Разрешимость интегрального уравнения электрического поля

Умножим уравнение (5) на произвольный элемент $\bar{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω , получим вариационное соотношение

$$-(A(\operatorname{div} u), \operatorname{div} v)_W + (Au, v)_W = (f, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (8)$$

Определение 1. Элемент $u \in W(\bar{\Omega})$ будем называть (обобщенным) решением уравнения (5), если для любых $v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется вариационное соотношение (8).

Исследуем уравнение (5) в пространстве $W(\bar{\Omega})$, $u \in W(\bar{\Omega})$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Сначала определим оператор A на $C_0^\infty(\Omega)$.

Будем рассматривать также оператор A , определяемый формулой (6), как псевдодифференциальный оператор (ПДО) [3–7]:

$$Au = \int a(\xi) \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

с символом

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (10)$$

Везде, где не указаны пределы интегрирования, понимаются интегралы по \mathbf{R}^2 . В выражении (10) выбирается та ветвь квадратного корня, для которой

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\sqrt{|\xi^2 - 1| + \operatorname{Re}(\xi^2 - 1)} + i\sqrt{|\xi^2 - 1| - \operatorname{Re}(\xi^2 - 1)}}{\sqrt{2}|\xi^2 - 1|}. \quad (11)$$

Представим символ ПДО (9) в другом виде:

$$a'(\xi) = \langle \xi \rangle^{-1} + b(\xi), \quad (12)$$

$$b(\xi) = \langle \xi \rangle^{-3} + g(\xi), \quad (13)$$

$$g(\xi) = F \left(\eta(|x|) \left(\frac{e^{i|x|}}{|x|} - \frac{e^{-|x|}}{|x|} - e^{-|x|} \right) \right), \quad (14)$$

где Fu – преобразование Фурье элемента u .

Для функции $g(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ верна оценка [5, с. 63]:

$$|g(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{-7/2}. \quad (15)$$

Несмотря на то, что символы $a(\xi)$ и $a'(\xi)$ различны, они определяют один и тот же оператор A (на Ω). Мы будем использовать одно или другое представление по мере необходимости.

Рассмотрим полуторалинейную форму (мы поменяли знак левой части уравнения по сравнению с (8)):

$$t(u, v) := -\int a(\xi) \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi + \int a(\xi) (\xi \cdot \widehat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}) d\xi, \quad (16)$$

с символом $a(\xi)$, определенным формулой (10).

Вариационное соотношение (8) можно записать в виде

$$t(u, v) = -(f, v)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Далее, $t(u, v)$ на $W(\bar{\Omega})$ есть ограниченная полуторалинейная форма $t(u, v)$ на (комплексном) пространстве $W(\bar{\Omega}) : |t(u, v)| \leq C \|u\|_W \|v\|_W$. Тогда она однозначно определяет линейный ограниченный оператор $T : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ по формуле [12]:

$$t(u, v) = (Tu, v)_W, \forall u \in W(\bar{\Omega}). \quad (17)$$

Ограниченность формы достаточно проверять на $C_0^\infty(\Omega)$, поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в W . Саму форму также достаточно определять только на $C_0^\infty(\Omega)$. Очевидно, что полуторалинейная форма $(u, v)_W$ порождает единственный оператор $I : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$.

Утверждение 6. Оператор $T : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ является инъективным.

Доказательство следует из теоремы о единственности решения соответствующей краевой задачи [5, 6].

Наша цель теперь – доказать фредгольмовость оператора $T : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$, представив его в виде суммы непрерывно обратимого и компактного операторов.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$t'(u, v) := -\int a'(\xi) \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int a'(\xi) (\xi \cdot \hat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}) d\xi \quad (18)$$

с символом $a'(\xi)$, определенным формулами (12)–(14). Представим эту форму в виде суммы двух форм:

$$t'(u, v) = t_0(u, v) + t_c(u, v), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} t_0(u, v) &:= -\int \langle \xi \rangle^{-1} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int (1+i) \langle \xi \rangle^{-3} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \\ &+ \int \left(\langle \xi \rangle^{-1} + \langle \xi \rangle^{-3} \right) (\xi \cdot \hat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}) d\xi, \\ t_c(u, v) &:= -\int b(\xi) \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi - \\ &- \int (1+i) \langle \xi \rangle^{-3} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int g(\xi) (\xi \cdot \hat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь в первой форме собраны главные части символов и добавлена для удобства форма, определяемая вторым слагаемым. Во второй форме – остальные слагаемые.

Утверждение 7. Оператор $T_c : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$, порождаемый формой $t_c(u, v)$, является ограниченным и компактным.

Доказательство. Из оценок (13) и (15) получаем, что

$$|t_c(u, v)| = |(T_c u, v)_W| \leq C \|u\|_{-1} \|v\|_{-1/2}.$$

Полагая в этой оценке $v = T_c u$, находим, что (см. (7)):

$$\|T_c u\|_W^2 \leq C \|u\|_{-1} \|T_c u\|_{-1/2} \leq C \|u\|_{-1} \|T_c u\|_W,$$

откуда имеем

$$\|T_c u\|_W \leq C \|u\|_{-1}.$$

Пусть $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$ слабо в $W(\bar{\Omega})$. В силу непрерывности вложения $W(\bar{\Omega}) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ (утверждение 3) и компактности вложения $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \subset \tilde{H}^{-1}(\bar{\Omega})$ (см. [11]) имеем $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$ сильно в $\tilde{H}^{-1}(\bar{\Omega})$, и, из последней оценки заключаем, что $T_c u_n \rightarrow T_c u$, $n \rightarrow \infty$ сильно в $W(\bar{\Omega})$, поэтому оператор $T_c : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ компактен. \square

Рассмотрим форму $t_0(u, v)$. Сначала будем ее рассматривать на более широком пространстве $W(\mathbf{R}^2)$. Легко видеть, что $t_0(u, v)$ определена на $W(\mathbf{R}^2)$ и является ограниченной полуторалинейной формой на (комплексном) пространстве $W(\mathbf{R}^2)$: $|t_0(u, v)| \leq C \|u\|_W \|v\|_W$. Тогда она однозначно определяет линейный ограниченный оператор $T_r : W(\mathbf{R}^2) \rightarrow W(\mathbf{R}^2)$ по формуле [12]:

$$t_0(u, v) = (T_r u, v)_W, \forall u \in W(\mathbf{R}^2). \quad (20)$$

Ограниченность формы достаточно проверять на $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, поскольку $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ плотно в $W(\mathbf{R}^2)$. Саму форму также достаточно определять только на $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Очевидно, что полуторалинейная форма $(u, v)_W$ порождает единичный оператор $I : W(\mathbf{R}^2) \rightarrow W(\mathbf{R}^2)$.

Пусть $u \in W_1(\mathbf{R}^2)$, $v \in W_2(\mathbf{R}^2)$. Тогда имеем $(T_r u, v)_W = t_0(u, v) = 0$, поэтому $T_r u \perp W_2(\mathbf{R}^2)$ и $T_r u \in W_1(\mathbf{R}^2)$ в силу утверждения 4. Таким образом, $W_1(\mathbf{R}^2)$ является инвариантным подпространством для оператора T_r . Перестановка индексов $1 \leftrightarrow 2$ доказывает, что $W_2(\mathbf{R}^2)$ также является инвариантным подпространством для T_r . Получаем разложение

$$T_r = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1(\mathbf{R}^2) \\ W_2(\mathbf{R}^2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} W_1(\mathbf{R}^2) \\ W_2(\mathbf{R}^2) \end{pmatrix} \quad (21)$$

с операторами $T_j : W_j(\mathbf{R}^2) \rightarrow W_j(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$, порождаемыми сужением формы $t_0(u, v)$ на $W_j(\mathbf{R}^2)$:

$$(T_1 u, v)_{W_1} = t_1(u, v) = \int \left(-\langle \xi \rangle^{-1} + (1+i)\langle \xi \rangle^{-3} \right) \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi, \quad \forall v \in W_1(\mathbf{R}^2),$$

$$(T_2 u, v)_{W_2} = t_2(u, v) = \int \left(\xi^2 \left(\langle \xi \rangle^{-1} + \langle \xi \rangle^{-3} \right) - \langle \xi \rangle^{-1} + \right. \\ \left. + (1+i)\langle \xi \rangle^{-3} \right) \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi, \quad \forall v \in W_2(\mathbf{R}^2),$$

или, после преобразования,

$$t_1(u, v) = \int \left(-\xi^2 + i \right) \langle \xi \rangle^{-3} \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi, \quad \forall v \in W_1(\mathbf{R}^2),$$

$$t_2(u, v) = \int \left(\xi^2 \langle \xi \rangle^{-1} + i \langle \xi \rangle^{-3} \right) \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi, \quad \forall v \in W_2(\mathbf{R}^2).$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\xi^2 \left(\widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)} \right) = (\xi \cdot \widehat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}) + (\xi' \cdot \widehat{u}(\xi)) (\xi' \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}).$$

Рассмотрим квадратичную форму $(T_1 u, u)_{W_1} = t_1(u, u), u \in W_1(\mathbf{R}^2)$. Имеем

$$t_1(u, u) = \int \left(-\xi^2 + i \right) \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

тогда

$$|t_1(u, u)|^2 = \left(\int \xi^2 \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 + \left(\int \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 \geq \\ \geq \frac{1}{2} \left(\int \xi^2 \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\int \langle \xi \rangle^{-1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 \geq \frac{1}{2} \|u\|_W^4.$$

Таким образом, $|t_1(u, u)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_W^2, u \in W_1(\mathbf{R}^2)$, поэтому оператор

$T_1 : W_1(\mathbf{R}^2) \rightarrow W_1(\mathbf{R}^2)$ является коэрцитивным [9] и, следовательно, непрерывно обратимым.

Далее рассмотрим квадратичную форму $(T_2 u, u)_{W_2} = t_2(u, u), u \in W_2(\mathbf{R}^2)$. Имеем $t_2(u, u) = \int \left(\xi^2 \langle \xi \rangle^{-1} + i \langle \xi \rangle^{-3} \right) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$.

Тогда

$$|t_2(u, u)|^2 = \left(\int \xi^2 \langle \xi \rangle^{-1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 + \left(\int \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 \geq \\ \geq \frac{1}{2} \left(\int \xi^2 \langle \xi \rangle^{-1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \langle \xi \rangle^{-3} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} \left(\int \left(\xi^2 + \langle \xi \rangle^{-2} \right) \langle \xi \rangle^{-1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 = \frac{1}{8} \left(\int \langle \xi \rangle |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^2 > \frac{1}{8} \|u\|_W^4.$$

Таким образом, $|t_2(u, u)| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u\|_W^2$, $u \in W_2(\mathbf{R}^2)$, поэтому оператор $T_2 : W_2(\mathbf{R}^2) \rightarrow W_2(\mathbf{R}^2)$ является коэрцитивным [9] и, следовательно, непрерывно обратимым.

Объединяя полученные результаты и учитывая разложение (21), получаем

Утверждение 8. Оператор $T_r : W(\mathbf{R}^2) \rightarrow W(\mathbf{R}^2)$, порождаемый формой $t_0(u, v)$, является непрерывно обратимым.

Из утверждения 8 следует [13, с. 121] оценка

$$\|T_r u\|_W \geq m \|u\|_W, \quad m > 0, \quad (22)$$

для некоторого m .

Вернемся к рассмотрению оператора $T_0 : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$, порождаемого той же формой $t_0(u, v)$, но на пространстве $W(\bar{\Omega})$. Поскольку $W(\bar{\Omega})$ есть (замкнутое) подпространство $W(\mathbf{R}^2)$, из утверждения 8 следует

Лемма 1. Для оператора $T_0 : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$, порождаемого формой $t_0(u, v)$, верна оценка

$$\|T_0 u\|_W \geq m \|u\|_W, \quad m > 0, \quad (23)$$

для некоторого m .

Далее докажем следующий результат.

Лемма 2. Оператор $T_0 : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ является инъективным.

Доказательство. Вычисляя мнимую часть квадратичной формы $t_0(u, u)$, имеем

$$\text{Im} t_0(u, u) = \int \langle \xi \rangle^{-3} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi > 0$$

при $u \neq 0$ (как элемент пространства $W(\bar{\Omega})$). Поэтому уравнение $T_0 u = 0$ имеет только тривиальное решение в $W(\bar{\Omega})$.

Сопряженный к T_0 оператор $T_0^* : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ определяется сопряженной формой

$$\begin{aligned} t_0^*(u, v) := & -\int \langle \xi \rangle^{-1} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int (1-i) \langle \xi \rangle^{-3} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \\ & + \int \left(\langle \xi \rangle^{-1} + \langle \xi \rangle^{-3} \right) (\xi \cdot \hat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}) d\xi, \end{aligned}$$

для которой имеем

$$|\text{Im} t_0(u, u)| = \int \langle \xi \rangle^{-3} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi > 0$$

при $u \neq 0$ (как элемент пространства $W(\bar{\Omega})$). Поэтому верна

Лемма 3. Ядро оператора $T_0^* : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ состоит только из нулевого элемента, $\ker T_0^* = \{0\}$.

Теперь все готово, чтобы доказать основной результат статьи.

Теорема 1. Оператор $T : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ является непрерывно обратимым.

Доказательство. Из леммы 1 (оценки (23)) следует [13, с. 210], что область значений оператора $T_0 : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ замкнута. Тогда, по теореме Хаусдорфа [13, с. 205], оператор T_0 нормально разрешим. По лемме 3 получаем [13, с. 205], что уравнение $T_0 u = f$, $u \in W(\bar{\Omega})$, однозначно разрешимо для любой правой части $f \in W(\bar{\Omega})$. Таким образом, доказано, что оператор $T_0 : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ непрерывно обратим.

Тогда оператор $T : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ является суммой непрерывно обратимого оператора T_0 и компактного оператора T_c (утверждение 7), $T = T_0 + T_c$. Значит, оператор T фредгольмов (с нулевым индексом) [13, с. 206]. Тогда из инъективности оператора T (утверждение 6) и альтернативы Фредгольма [13, с. 206] получаем, что оператор $T : W(\bar{\Omega}) \rightarrow W(\bar{\Omega})$ непрерывно обратим.

В силу теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Обобщенное решение $u \in W(\bar{\Omega})$ уравнения (5) (и (3)) существует и единственно при любой правой части $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Заключение

Доказана непрерывная обратимость оператора уравнения электрического поля в случае плоского экрана и непоглощающих сред, т.е. при условии $\text{Im } k = 0$. Применен метод квадратичных форм. В отличие от [5, 6], разложение пространства $W(\bar{\Omega})$ на подпространства не использовалось.

Список литературы

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М. : Мир, 1964. 428 с.
2. Maue A. W. Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation // Zeitschrift für Physik. 1949. Vol. 12. P. 601–618.
3. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости задачи дифракции на плоском ограниченном идеально проводящем экране // Доклады Академии наук СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 147–149.
4. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы псевдодифференциальных уравнений в задаче дифракции на ограниченном экране // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 136–143.
5. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖР, 1996. 176 с.
6. Pyinsky A. S., Smirnov Yu. G. Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998. 114 p.
7. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2009. 266 с.
8. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM Journal of Mathematical Analysis. 1988. Vol. 19, № 3. P. 613–626.

9. Kress R. Linear Integral Equations // Applied Mathematical sciences. New York : Springer-Verlag, 1989. Vol. 82. 300 p.
10. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М. : Наука, 1971. 352 с.
11. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980. 664 с.
12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972. 740 с.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1993. 439 с.

References

1. Khenl Kh., Maue A., Vestpfal' K. *Teoriya difraktsii = Diffraction theory*. Moscow: Mir, 1964:428. (In Russ.)
2. Maue A.W. Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation. *Zeitschrift fur Physik*. 1949;12:601–618.
3. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of the diffraction problem on a flat bounded ideally conducting screen. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1991;319(1):147–149. (In Russ.)
4. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of a system of pseudodifferential equations in the problem of diffraction on a limited screen. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1992;28(1):136–143. (In Russ.)
5. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens*. Moscow: IPRZhR, 1996:176. (In Russ.)
6. Ilyinsky A.S., Smirnov Yu.G. *Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998:114.
7. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying electrodynamics problems*. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2009:266. (In Russ.)
8. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. 1988;19;(3):613–626.
9. Kress R. Linear Integral Equations. *Applied Mathematical sciences*. New York: Springer-Verlag, 1989;82:300.
10. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uraveneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya = Convolution equations and projection methods for solving them*. Moscow: Nauka, 1971:352. (In Russ.)
11. Tribel' Kh. *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory = Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Moscow: Mir, 1980:664. (In Russ.)
12. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov = Perturbation theory of linear operators*. Moscow: Mir, 1972:740. (In Russ.)
13. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz = Functional analysis*. Moscow: Nauka, 1993:439. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.01.2024

Принята к публикации / Accepted 12.02.2024

УДК 517.925

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-5

О нелокальных бифуркациях в двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия

vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследование динамических систем, инвариантных относительно разных групп преобразований, важно как для теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений. Локальные бифуркации в типичных двухпараметрических семействах динамических систем, задаваемых векторными полями, инвариантными относительно инволюции плоскости, имеющей прямую из неподвижных точек, были описаны Х. Жолондеком. Целью настоящей работы является исследование некоторых нелокальных бифуркаций в таких семействах. *Материалы и методы.* Применяются метод точечных отображений и другие методы качественной теории дифференциальных уравнений. *Результаты.* Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство векторных полей на плоскости с симметрией относительно оси x . Предполагается, что при нулевом значении параметра поле имеет грубое седло, слабое седло, лежащие на оси x , и два симметричных контура, образованные сепаратрисами этих седел. Получена бифуркационная диаграмма – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров по типам фазовых портретов в окрестности полицикла, составленного из указанных контуров. В частности, показано, что из каждого контура может родиться по одному устойчивому грубому предельному циклу. *Выводы.* Описан один из возможных сценариев возникновения устойчивых периодических колебаний при изменении параметров динамической системы с инволютивной симметрией.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, динамическая система, инволютивная симметрия, седло, слабое седло, сепаратрисный контур, предельный цикл, бифуркационная диаграмма

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. О нелокальных бифуркациях в двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 51–63. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-5

On nonlocal bifurcations in two-parameter families of vector fields on the plane with involutive symmetry

V.Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

vroitenberg@mail.ru

Abstract. *Background.* The study of dynamical systems that are invariant with respect to different groups of transformations is important both for the theory of differential equations and for its applications. Local bifurcations in generic two-parameter families of dynamical systems defined by vector fields invariant under the involution of a plane having a line of fixed points were described by H. Zholondek. The purpose of this research is to study some nonlocal bifurcations in such families. *Materials and methods.* The method of point map-

© Ройтенберг В. Ш., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

pings and other methods of the qualitative theory of differential equations are applied. *Results.* We consider a generic two-parameter family of planar vector fields with symmetry about the x -axis. It is assumed that at a zero value of the parameter, the field has a rough saddle, a weak saddle lying on the x axis, and two symmetrical contours formed by the separatrices of these saddles. A bifurcation diagram is obtained – a partition of the neighborhood of zero on the parameter plane by types of phase portraits in the neighborhood of a polycycle composed of these contours. In particular, we show that one stable rough limit cycle can be born from each contour. *Conclusions.* One of the possible scenarios for the occurrence of stable periodic oscillations when changing the parameters of a dynamical system with involutive symmetry is described.

Keywords: planar vector field, dynamical system, saddle, involutive symmetry, saddle, weak saddle, the separatrix contour, limit cycle, bifurcation diagram

For citation: Roitenberg V.Sh. On nonlocal bifurcations in two-parameter families of vector fields on the plane with involutive symmetry. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):51–63. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-5

Введение

Изучение динамических систем с различного рода симметрией интересно с теоретической точки зрения и полезно для приложений. Имеется ряд работ, в которых рассматриваются бифуркации таких систем [1–8]. В основном изучались бифуркации положений равновесия и периодических траекторий. Нелокальные бифуркации рассматривались в [8] для систем на плоскости с центральной симметрией. Однако естественно рассматривать нелокальные бифуркации и для систем с другими симметриями.

Обозначим $X^r(M)$ – банахово пространство C^r -векторных полей с C^r -нормой ($r \geq 3$), заданных в круге $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, а $X_R^r(M)$ – его подпространство, состоящее из векторных полей $X : M \rightarrow TM = \mathbf{R}^2$, инвариантных относительно инволюции $R : (x_1, x_2) \mapsto \mapsto (x_1, -x_2)$, т.е. таких, что $X \circ R = R \circ X$.

Пусть $X_\varepsilon(x_1, x_2) = P_1(x_1, x_2, \varepsilon)\partial / \partial x_1 + P_2(x_1, x_2, \varepsilon)\partial / \partial x_2$ – семейство векторных полей из $X_R^r(M)$, C^r -гладко зависящих от точки (x_1, x_2) и параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbf{R}^2$. Вследствие симметрии $P_1(x_1, -x_2, \varepsilon) = P_1(x_1, x_2, \varepsilon)$, $P_2(x_1, -x_2, \varepsilon) = -P_2(x_1, x_2, \varepsilon)$, а прямая $F : x_2 = 0$, инвариантна для всех полей семейства и разбивает M на два инвариантных множества: $M_+ = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ и $M_- = \{(x_1, x_2) : x_2 < 0\}$.

Локальные бифуркации в типичных семействах таких полей изучены Х. Жолондеком в [3]. Мы опишем некоторые нелокальные бифуркации.

Предположим, что поле X_0 имеет негрубое седло $O_1^0 = (s_1^0, 0)$, грубое седло $O_2^0 = (s_2^0, 0)$, $s_1^0 < s_2^0$, открытая дуга $(O_1^0 O_2^0)$ прямой F является их общей сепаратрисой, и, кроме того, существуют еще две симметричных сепаратрисы, соединяющие эти седла. Поскольку поле X_0 имеет ко-размерность 2 в пространстве $X_R^r(M)$, то естественно рассматривать его бифуркации

в двухпараметрическом семействе X_ε «общего положения». Заметим, что в пространстве $X^r(M)$ векторное поле X_0 имеет более высокую ко-размерность и его бифуркации в $X^r(M)$ следует изучать в семействах векторных полей с большим числом параметров. Но исследование бифуркаций сепаратрисных контуров рассматриваемого вида в семействах векторных полей из $X^r(M)$ с числом параметров ≥ 3 не проводилось.

1. Контур из сепаратрис седла и слабого седла. Выбор параметров

Симметрия поля X_0 влечет диагональность матрицы линейной части поля в точках $O_k^0: (\partial P_i(s_k^0, 0, 0) / \partial x_j) = \text{diag}(\lambda_{k1}^0, \lambda_{k2}^0)$. Пусть $\lambda_{11}^0 \neq 0$, $\lambda_{12}^0 = 0$. Тогда при ε , достаточно близких к нулю, поле X_ε имеет (центральное) инвариантное многообразие $W^c(\varepsilon)$, задаваемое в окрестности точки O_1^0 уравнением $x_1 = w(x_2, \varepsilon)$, $x_2 \in (-l, l)$, где $w \in C^r$, $w(0, 0) = s_1^0$, $\partial w(0, 0) / \partial x_2 = 0$ [9]. Если ограничение поля X_0 на $W^c(0)$ имеет вид $(bx_2^3 + o(x_2^3))\partial / \partial x_2$, где $b\lambda_{11}^0 < 0$, то особая точка O_1^0 называется *слабым* (по направлению оси x_2) *седлом*. Будем считать $\lambda_{11}^0 < 0$, $b > 0$. Тогда точка O_1^0 имеет две выходящие сепаратрисы, принадлежащие $W^c(0)$, и две входящие сепаратрисы, принадлежащие F . Из работы [9, с. 293–294] следует, что существует такая C^r -замена координат

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x, y, \varepsilon), \quad x_2 = g_2(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \varepsilon \in (-\delta_*, \delta_*)^2, \\ g_1(-x, y, \varepsilon) &\equiv g_1(x, y, \varepsilon), \quad g_2(-x, y, \varepsilon) \equiv -g_2(x, y, \varepsilon), \\ g_1(0, 0, 0) &= s_1^0, \quad \text{sgn } g_2(x, y, \varepsilon) = \text{sgn } x, \end{aligned}$$

что в координатах x, y центральное многообразие $W^c(\varepsilon)$ задается уравнением $y = 0$, а линия F – уравнением $x = 0$, причем при $\varepsilon = 0$ точки F с координатой $y > 0$ лежат на $(O_1^0 O_2^0)$, поле X_ε имеет вид

$$X_\varepsilon(x, y) = P(x, \varepsilon)\partial / \partial x + Q(x, y, \varepsilon)\partial / \partial y,$$

где

$$\begin{aligned} P(x, \varepsilon) &= a(\varepsilon)x + (b + \eta_1(x, \varepsilon))x^3, \quad a(0) = 0, \\ \eta_1 \in C, \quad \eta_1(0, 0) &= 0, \quad Q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad Q'_y(0, 0, 0) = \lambda_{11}^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть выполняются следующие условия.

Условие А₁. Точка O_1^0 – слабое (по направлению оси x_2) седло, точка O_2^0 – грубое седло. Открытая дуга $(O_1^0 O_2^0)$ прямой F между O_1^0 точками O_1^0

и O_2^0 является входящей сепаратрисой слабого седла O_1^0 и выходящей сепаратрисой седла O_2^0 . Одна из выходящих сепаратрис слабого седла O_1^0 принадлежит $\text{int } M_+$ и является входящей сепаратрисой седла O_2^0 .

При ε , достаточно близких к нулю, X_ε имеет седло $O_2(\varepsilon) \in F$ с собственными значениями матрицы линейной части $\lambda_{21}(\varepsilon) > 0$, $\lambda_{22}(\varepsilon) < 0$, $\lambda_{2k}(\cdot) \in C^1$, $\lambda_{2k}(0) = \lambda_{2k}^0$, $k = 1, 2$, локальные неустойчивое и устойчивое инвариантные многообразия которого задаются соответственно уравнениями $x_2 = 0$ и $x_1 = w_1(x_2, \varepsilon)$, где $w_1(\cdot, \cdot) \in C^r$, $w_1(-x_2, \varepsilon) = w_1(x_2, \varepsilon)$, $w_1(0, 0) = s_2^0$. Сделаем C^r -замену координат $\xi = w_1(x_2, \varepsilon) - x_1$, $\eta = x_2$, выпрямляющую устойчивое инвариантное многообразие. В новых координатах получаем

$$X_\varepsilon = (\lambda_{21}^0 + q_1(\xi, \eta, \varepsilon))\xi \partial / \partial \xi + (\lambda_{22}^0 + q_2(\xi, \eta, \varepsilon))\eta \partial / \partial \eta, \quad (2)$$

где q_k – непрерывные функции, $q_k(0, 0, 0) = 0$, $k = 1, 2$, причем при $\varepsilon = 0$ точки с координатами $\eta = 0$, $\xi > 0$ лежат на дуге $(O_1^0 O_2^0)$.

Обозначим l_ε^3 – открытую дугу, задаваемую в координатах ξ , η условиями $\eta = d$, $-d < \xi < d$, где $d > 0$, и параметризованную координатой ξ . Если ε достаточно близко к нулю, то центральное многообразие $W^c(\varepsilon)$ пересекает дугу l_ε^3 в точке с параметром $\xi = p(\varepsilon)$, где $p(\cdot) \in C^1$, $p(0) = 0$.

Пусть теперь выполняется и следующее условие.

Условие A_2 . Производные $a'(0)$ и $p'(0)$ – линейно независимы, т.е.

$$a'_{\varepsilon_1}(0)p'_{\varepsilon_2}(0) - a'_{\varepsilon_2}(0)p'_{\varepsilon_1}(0) \neq 0.$$

Это условие не зависит от произвола в выборе $W^c(\varepsilon)$ и l_ε^3 .

Сделав замену параметров $\bar{\varepsilon}_1 = a(\varepsilon)$, $\bar{\varepsilon}_2 = p(\varepsilon)$ и сохранив их прежние обозначения, можно считать, что

$$a(\varepsilon) = \varepsilon_1, \quad p(\varepsilon) = \varepsilon_2. \quad (3)$$

Пусть $L_+^0 \subset \text{int } M_+$ – сепаратриса, идущая из седла O_1^0 в седло O_2^0 . Из-за симметрии $L_-^0 := R(L_+^0)$ – также сепаратриса, идущая из седла O_1^0 в седло O_2^0 . Обозначим $\Gamma_\pm^0 := L_\pm^0 \cup (O_1^0 O_2^0) \cup \{O_1^0, O_2^0\}$, $\Gamma^0 := \Gamma_+^0 \cup \Gamma_-^0$.

2. Формулировка результатов

Теорема. Пусть выполняются условия A_1 и A_2 . Тогда существуют числа $\delta > 0$, $\delta_0 > 0$, окрестность U полицикла Γ^0 , $R(U) = U$, и разбиение области параметров $E = (-\delta, \delta) \times (-\delta_0, \delta_0)$ на множества (рис. 1):

$$B_0 = \{(0, 0)\}, \quad B_1 = (0, \delta) \times \{0\}, \\ B_2 = \{0\} \times (0, \delta_0), \quad B_3 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = \beta(\varepsilon_2)\},$$

где

$$\begin{aligned} \beta: (0, \delta_0) \rightarrow (-\delta, 0), \beta \in C^1, \beta(+0) = 0, B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}, B_5 = \{0\} \times (-\delta_0, 0), \\ E_1 = (0, \delta) \times (-\delta_0, 0), E_2 = (0, \delta) \times (0, \delta_0), E_3 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \beta(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < 0\}, \\ E_4 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : -\delta < \varepsilon_1 < \beta(\varepsilon_2)\}, E_5 = (-\delta, 0) \times (-\delta_0, 0) \end{aligned}$$

такие, что поле X_ε , $\varepsilon \in E$, имеет в U :

- только следующие особые точки:
 - седло $O_2(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in E$, а также
 - слабое седло O_1^0 (соотв. $O_1(\varepsilon) \in F$) при $\varepsilon = 0$ (соотв. $\varepsilon \in B_2 \cup B_5$),
 - грубое седло $O_1(\varepsilon) \in F$ при $\varepsilon \in E_1 \cup B_1 \cup E_2$,
 - два симметричных грубых седла $O_\pm(\varepsilon) \in M_\pm$ и грубый узел $O_1(\varepsilon) \in F$

при $\varepsilon \in E_3 \cup B_3 \cup E_4 \cup B_4 \cup E_5$;

- следующие нетривиальные неблуждающие множества:
 - два симметричных грубых устойчивых предельных цикла при $\varepsilon \in E_2 \cup B_2 \cup E_3$,
 - два симметричных устойчивых контура, образованных сепаратрисами седел O_1^0 (соотв. $O_1(\varepsilon)$) и $O_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ (соотв. $\varepsilon \in B_1$),
 - две симметричные устойчивые петли сепаратрис седел $O_\pm(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in B_3$.

Доказательство теоремы приведено в разд. 3–5. В силу симметрии векторных полей X_ε достаточно описать поведение их траекторий в окрестности контура Γ_+^0 в $\overline{M_+}$.

3. Отображения соответствия. Оценки времени перехода по траекториям

Пусть G_ε^1 , $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$, – область в M , задаваемая в координатах x, y неравенствами $|x| < 2d$, $|y| < 2d$, где $d > 0$ и $\delta' > 0$ выбраны столь малыми, чтобы в G_ε^1 выполнялось неравенство

$$|\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - \operatorname{div} X_0(s_1^0, 0)| = |\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - \lambda_{11}^0| < |\lambda_{11}^0| / 10. \quad (4)$$

Вследствие (1) и (3) для любого числа d , при котором выполняется (4), можно выбрать число $\delta_1 \in (0, \delta')$ так, что уравнение $P(x, \varepsilon) = 0$ на интервале $(-2d, 2d)$, помимо корня $x = 0$, имеет при $\varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1)$ еще два корня $x = \pm \tilde{x}(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2)$, где $\tilde{x}(\cdot, \cdot) - C^1$ -функция,

$$\tilde{x}(0, \varepsilon_2) = 0, \tilde{x}'_\mu(\mu, \varepsilon_2) \Big|_{\mu=\varepsilon_2=0} = 1/\sqrt{b} > 0, \quad (5)$$

а при $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$ не имело корней. Тогда поле X_ε имеет в G_ε^1 три особых точки, принадлежащие $W^c(\varepsilon)$: $O_1(\varepsilon)$ с координатами $x = y = 0$ и

$O_{\pm}(\varepsilon)$ с координатами $x = \pm \tilde{x}(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2)$ и $y = 0$ при $\varepsilon_1 \in (-\delta_1, 0)$, и одну особую точку $O_1(\varepsilon)$ с координатами $x = y = 0$ при $\varepsilon_1 \in [0, \delta_1)$. Мы можем считать δ_1 столь малым, что $O_1(\varepsilon)$ – устойчивый узел при $\varepsilon_1 \in (-\delta_1, 0)$ и седло (слабое седло) при $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1)$ (при $\varepsilon_1 = 0$), а $O_{\pm}(\varepsilon)$ – грубые седла. Ввиду (1) можно также считать, что

$$Q(x, y, \varepsilon) < 0 \text{ при всех } x \in (-2d, 2d), y \in (0, 2d), \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2. \quad (6)$$

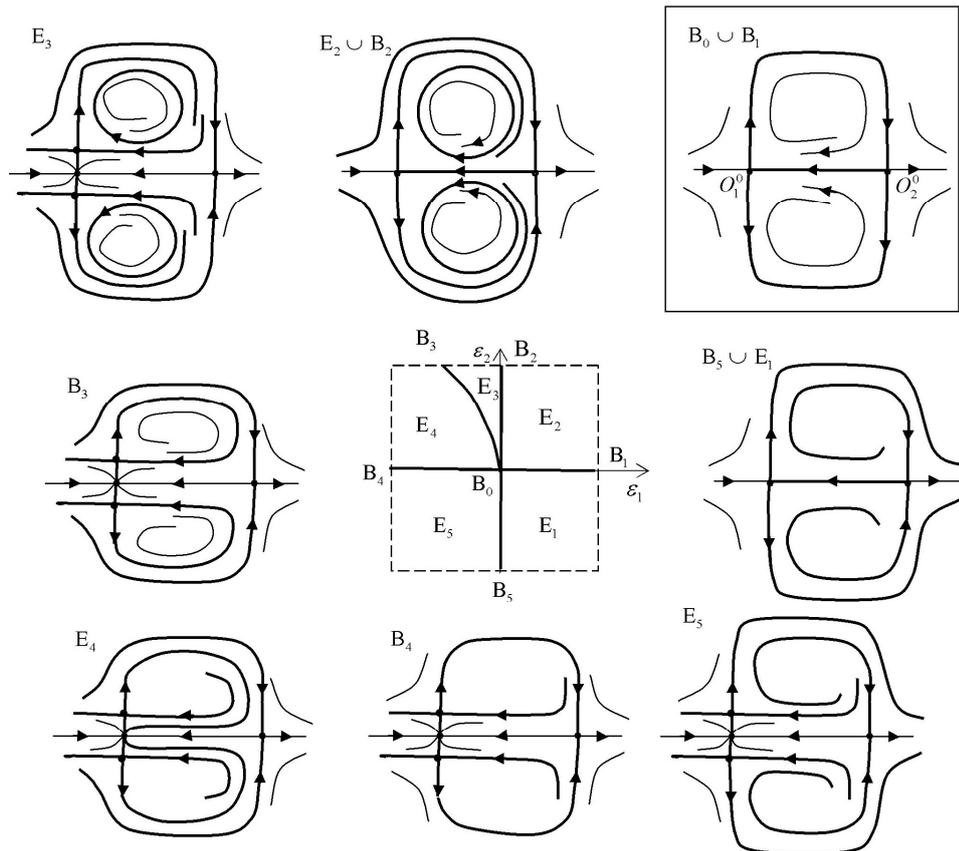


Рис. 1. Бифуркации в семействе векторных полей с условиями (A1) и (A2)

Далее мы уточним выбор чисел d и δ_1 . Пусть

$$u_+(\varepsilon) := \tilde{x}(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_1, 0) \times (-\delta_1, \delta_1)$$

$$\text{и } u_+(\varepsilon) := 0 \text{ при } \varepsilon \in [0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1). \quad (7)$$

Обозначим l_{ε}^1 (соотв. l_{ε}^2) открытую дугу в G_{ε}^1 , задаваемую в координатах x, y условиями $y = d, -d < x < d$ (соотв. $x = d, -d < y < d$) и параметризованную параметром x (соотв. y). Вследствие (6) и неравенства $P(x, \varepsilon) > 0$ для $x > u_+(\varepsilon)$ положительная полутраектория поля X_{ε} , начинающаяся в точ-

ке $A_1 \in l_\varepsilon^1$ с параметром $u > u_+(\varepsilon)$, пересекает дугу l_ε^2 в точке A_2 с параметром $y = \varphi_1(u, \varepsilon) > 0$, где $\varphi_1(\cdot, \cdot) \in C^{r-1}$, $\varphi_1(u_+(\varepsilon) + 0, \varepsilon) = 0$, время перехода по траекториям поля от точки A_1 до точки A_2 – $T_1(u, \varepsilon) = \int_u^d dx / P(x, \varepsilon)$. Зададим число

$$N > |\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0| / (\lambda_{11}^0 \lambda_{22}^0). \quad (8)$$

Из выражений (1) и (3) следует, что d и δ_1 можно считать выбранными так, что при рассматриваемых (x, ε) $0 < P(x, \varepsilon) \leq x / 2N$, тогда

$$T_1(u, \varepsilon) \geq -2N(\ln u - \ln d). \quad (9)$$

Зададим число $0 < \alpha < 0,1$. Пусть G_ε^2 – область в M , задаваемая в координатах ξ, η в окрестности $O_2(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$, неравенствами $|\xi| < 2d$, $|\eta| < 2d$, где d и δ_1 можно считать теми же, что были выбраны для области G_ε^1 и столь малыми, что для $(x_1, x_2) \in G_\varepsilon^2$, $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$, имеем

$$|\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - \operatorname{div} X_0(s_2^0, 0)| = |\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - (\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0)| < \alpha |\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0|, \quad (10)$$

$$|q_k(x, y, \varepsilon)| \leq \alpha |\lambda_{2k}^0| \text{ при } |x| < 2d, |y| < 2d, \varepsilon \in (-\delta', \delta')^2, k=1,2. \quad (11)$$

Обозначим l_ε^4 – открытую дугу в G_ε^2 , задаваемую в координатах ξ, η условиями $\xi = d$, $-d < \eta < d$, и параметризованную параметром η . Дуга l_ε^3 , задаваемая условиями $\eta = d$, $-d < \xi < d$, уже была введена выше. Из выражений (2) и (11) следует, что отрицательная полутраектория поля X_ε , начинающаяся в точке $B_1 \in l_\varepsilon^4$ с параметром $v > 0$, задается в G_ε^2 уравнением $\xi = \Xi(\eta, v, \varepsilon)$, $\eta \in [v, 2d)$, где Ξ – C^1 -функция, $\Xi(x, v, \varepsilon) > 0$, $\Xi(x, +0, \varepsilon) = 0$, пересекает дугу l_ε^3 в точке B_2 с параметром $\xi = \varphi_2(v, \varepsilon) = \Xi(d, v, \varepsilon)$, а время перехода по траекториям поля от B_2 до B_1 определяется соотношением:

$$T_3(v, \varepsilon) = - \int_v^d \frac{d\eta}{(\lambda_{22}^0 + q_2(\Xi(\eta, v, \varepsilon), \eta, \varepsilon))\eta} \leq \frac{1}{(1-\alpha)\lambda_{22}^0} (\ln v - \ln d). \quad (12)$$

При достаточно малых $\sigma > 0$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ отрицательная полутраектория поля X_ε , $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$, начинающаяся в точке дуги l_ε^1 с параметром $u \in [0, \sigma]$ первый раз пересечет дугу l_ε^4 в точке с параметром $\eta = \psi_1(u, \varepsilon)$ через время $-T_4(u, \varepsilon)$, где $\psi_1, T_4 \in C^1$, $\psi_1(0, \varepsilon) \equiv 0$, $(\psi_1)'_u(u, \varepsilon) > 0$. Тогда $T_4(u, \varepsilon)$ и $\psi_1'(u, \varepsilon)$ ограничены. Тем самым при некотором $K > 0$ имеем

$$u / K \leq \psi_1(u, \varepsilon) \leq Ku, \quad 0 < T_4(u, \varepsilon) \leq K \text{ для всех } u \in [0, \sigma], \varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2. \quad (13)$$

Мы можем также считать, что при выбранных σ , δ_2 и K положительная полутраектория поля X_ε , $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$, начинающаяся в точке дуги l_ε^2 с параметром $y \in [0, \sigma]$, первый раз пересечет дугу l_ε^3 в точке $\psi_2(y, \varepsilon)$, где $\psi_2 \in C^1$, $\psi_2' y(y, \varepsilon) > 0$, $\psi_2(0, \varepsilon) = p(\varepsilon) = \varepsilon_2$, через время $T_2(y, \varepsilon)$:

$$0 < T_2(y, \varepsilon) \leq K. \tag{14}$$

Отображение $f(\cdot, \varepsilon) := \psi_1^{-1}(\varphi_2^{-1}(\psi_2(\varphi_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$, где $\varphi_2^{-1}(\cdot, \varepsilon)$ и $\psi_1^{-1}(\cdot, \varepsilon)$ – отображения, обратные соответственно к $\varphi_2(\cdot, \varepsilon)$ и $\psi_1(\cdot, \varepsilon)$, является отображением последования по траекториям поля X_ε на части дуги l_ε^1 . Далее мы уточним его область определения в зависимости от параметра ε .

4. Устойчивость рождающихся циклов

Лемма. Существуют числа $\rho > 0$ и $\delta \in (0, \delta_2)$ такие, что замкнутая траектория поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, проходящая через точку дуги l_ε^1 с параметром $u \in (0, \rho)$, является грубым устойчивым предельным циклом.

Доказательство леммы. Пусть указанная замкнутая траектория $L_\varepsilon(u)$ имеет период T и задается уравнениями $x_k = \hat{x}_k(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2$, где $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0)) \in l_\varepsilon^1$. Тогда получаем ее характеристический показатель [10, с. 126]:

$$\chi(L_\varepsilon(u)) = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt. \tag{15}$$

При достаточно малых ρ и δ траектория $L_\varepsilon(u)$ последовательно пересекает дуги l_ε^2 , l_ε^3 , l_ε^4 и l_ε^1 соответственно в моменты

$$t_1 = T_1(u, \varepsilon), \quad t_2 = T_1(u, \varepsilon) + T_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$t_3 = T_1(u, \varepsilon) + T_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) + T_3(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon)$$

$$\text{и } T = T_1(u, \varepsilon) + T_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) + T_3(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) + T_4(u, \varepsilon).$$

Из выражений (4), (9), (10) и (12)–(14) получаем, обозначив $D = \max_{\varepsilon \in [-\delta', \delta']^2} \max_{z \in M} |\operatorname{div} X_\varepsilon(z)|$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq DT_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) \leq DK,$$

$$\int_{t_3}^T \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq T_4(u, \varepsilon) \leq DK,$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_2}^{t_3} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt &\leq (1 + \alpha) |\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0| T_3(\Psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) \leq \\
 &\leq \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{|\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0|}{\lambda_{22}^0} |\ln u + \ln K - \ln d|, \\
 \int_0^{t_1} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt &\leq \frac{9\lambda_{11}^0}{10} T_1(u, \varepsilon) \leq -\frac{9\lambda_{11}^0}{5} N(\ln u - \ln d), \\
 \int_0^T \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt &\leq C_1 \ln u + C_2, \tag{16}
 \end{aligned}$$

где C_2 не зависит от u и ε , а $C_1 = -\frac{9\lambda_{11}^0}{5} N + \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{|\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0|}{\lambda_{22}^0}$. Вследствие неравенства $0 < \alpha < 0,1$ и (8) имеем $C_1 > 0$. Так как $\lim_{u \rightarrow +0} \ln u = -\infty$, то из (15) и (16) получаем, что $\rho > 0$ можно выбрать так, что $\chi(L_\varepsilon(u)) < 0$, если $u \in (0, \rho)$. Но это означает грубость и устойчивость цикла $L_\varepsilon(u)$.

5. Получение бифуркационной диаграммы

Мы можем считать, что отображение $f(\cdot, 0)$ определено на $(0, \rho]$, где ρ выбрано согласно лемме, при этом $f(+0, 0) = 0$. Покажем, что все траектории поля X_0 , проходящие через точки дуги l_0^1 с параметром $u \in (0, \rho]$, ω -предельны к контуру Γ_+^0 , что равносильно неравенству $f(u, 0) < u$. Пусть это не так. При сделанном предположении либо $f(u_0, 0) > u_0$ для всех $u_0 \in (0, \rho)$, либо $f(u_*, 0) = u_*$ при некотором $u_* \in (0, \rho)$. Из леммы следует, что $0 < f'_u(u_*, 0) < 1$ и потому $f(u_0, 0) > u_0$ при некотором $u_0 \in (0, u_*)$. В обоих случаях фиксируем число u_0 . Тогда при ε , близких к нулю, имеем

$$f(u_0, \varepsilon) > u_0. \tag{17}$$

Пусть $\varepsilon = (0, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 < 0$ – достаточно близко к нулю. Так как $\Psi_2(0, \varepsilon) = p(\varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$, то $f(\cdot, \varepsilon)$ определено на $(\hat{u}(\varepsilon), \rho)$, где $\hat{u}(\varepsilon) = \varphi_1^{-1}(\Psi_2^{-1}(0, \varepsilon), \varepsilon) > 0$, и

$$f(\hat{u}(\varepsilon) + 0, \varepsilon) = 0 < \hat{u}(\varepsilon). \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что существует $\bar{u} \in (\hat{u}(\varepsilon), \rho)$ такое, что $f(\bar{u}, \varepsilon) = \bar{u}$. Согласно лемме $0 < f'_u(\bar{u}, \varepsilon) < 1$. Вместе с (17) и (18) это влечет существование у $f(\cdot, \varepsilon)$ еще двух неподвижных точек, в противоречие с утверждением леммы. Итак, сделанное предположение неверно и все траек-

тории поля X_0 , проходящие через точки дуги l_0^1 с параметром $u \in (0, \rho)$, ω -предельны к контуру Γ_+^0 .

Так как $f(\rho, 0) < \rho$, то δ можно считать выбранным так, что $f(\rho, \varepsilon)$ определено при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ и

$$f(\rho, \varepsilon) < \rho \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2. \quad (19)$$

Обозначим $l_{\varepsilon, \rho}^1$ – часть дуги l_ε^1 , состоящую из точек с параметром $u \in (0, \rho]$.

Из неравенства $f(\rho, 0) < \rho$ следует, что через точку l_0^1 с параметром $x = f(\rho, 0)$ можно провести замкнутую трансверсаль $\Gamma_+^{\text{in}} \subset M_+$ к траекториям поля X_0 . Выберем во внешней компоненте $M \setminus (L_+^0 \cup L_-^0 \cup \{O_1^0, O_2^0\})$ замкнутую кривую Γ^{ex} , $R(\Gamma^{\text{ex}}) = \Gamma^{\text{ex}}$, негомтопную нулю и пересекающую прямую F в двух точках так, чтобы в замкнутом кольце между $L_+^0 \cup L_-^0 \cup \{O_1^0, O_2^0\}$ и Γ^{ex} не было особых точек поля X_0 , отличных от O_1^0 и O_2^0 . Пусть U – окрестность Γ^0 , границей которой является $\Gamma_+^{\text{in}} \cup R(\Gamma_+^{\text{in}}) \cup \Gamma^{\text{ex}}$. Если δ выбрано достаточно малым, то для любого поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, $O_1(\varepsilon)$, $O_\pm(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$ – единственные особые точки, лежащие в U , а замкнутая траектория, лежащая в U , либо пересекает $l_{\varepsilon, \rho}^1$, либо ей симметрична.

Если δ_2 было выбрано достаточно малым, то при всех $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ функция $\varphi(\cdot, \varepsilon) := \psi_1^{-1}(\varphi_2^{-1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задает отображение дуги $\eta = d$, $0 < \xi < \delta_2$ в дугу $y = d$, $0 < x < d$, по траекториям поля X_ε . Согласно [11, с. 296–298] имеем

$$\varphi(\xi, \varepsilon) = c(\varepsilon)\xi^{\lambda(\varepsilon)} + r(\xi, \varepsilon), \quad (20)$$

где $\lambda(\varepsilon) := -\lambda_{22}(\varepsilon) / \lambda_{21}(\varepsilon)$ – седловой индекс точки $O_2(\varepsilon)$,

$$c(\varepsilon) > 0, c(\cdot) \in C^1, \left| \frac{\partial^{i+j} r(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi^i \partial \varepsilon^j} \right| \leq D \xi^{\lambda(\varepsilon) - i + s}, D > 0, 0 < s < 1, 0 \leq i + j \leq 1. \quad (21)$$

Выходящая сепаратриса седла $O_+(\varepsilon)$ будет совпадать с его входящей сепаратрисой, образуя вместе с седлом контур $\Gamma_+(\varepsilon)$, если $\varepsilon_2 > 0$ и $\Delta(\varepsilon) = 0$, где

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &:= f\left(\tilde{x}\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) + 0, \varepsilon\right) - \\ &- \tilde{x}\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right) = \varphi(\varepsilon_2, \varepsilon) - \tilde{x}\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Вследствие (20) имеем

$$\begin{aligned} \Delta'_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \tilde{x}'_{\mu}(\mu, \varepsilon_2) \cdot \frac{1}{2\mu} \Big|_{\mu = \sqrt{|\varepsilon_1|}} + \\ &+ c(\varepsilon)\varepsilon_2^{\lambda(\varepsilon)} \ln \varepsilon_2 \lambda'_{\varepsilon_1}(\varepsilon) + c'_{\varepsilon_1}(\varepsilon)\varepsilon_2^{\lambda(\varepsilon)} + r'_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

Ввиду (5) первое слагаемое в (23) стремится к $+\infty$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -0$, $\varepsilon_2 \rightarrow +0$. Поскольку остальные слагаемые в (22) ограничены, то δ можно считать выбранным так, что

$$\Delta'_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0 \text{ при всех } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (-\delta, 0) \times (0, \delta). \quad (24)$$

Из (20)–(22) и (5) видно, что при достаточно малом δ

$$\Delta(-0, \varepsilon_2) > 0 \text{ при всех } \varepsilon_2 \in (0, \delta). \quad (25)$$

Определим функцию $\gamma: (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$, положив $\gamma(\tau) := -\tau^{\lambda(0)}$. Из (20)–(22) и (5) следует, что при ε_2 , достаточно близких к нулю, $\Delta(\gamma(\varepsilon_2), \varepsilon_2) < 2c(0)\varepsilon_2^{2\lambda(0)/3} - \varepsilon_2^{\lambda(0)/2} / 2\sqrt{b}$, и потому δ можно считать выбранным так, что при $\delta_0 = \min\{\delta, \gamma^{-1}(\delta)\}$

$$\Delta(\gamma(\varepsilon_2), \varepsilon_2) < 0 \text{ для всех } \varepsilon_2 \in (0, \delta_0). \quad (26)$$

Из (24)–(26) получаем, что $\forall \varepsilon_2 \in (0, \delta_0) \exists \beta(\varepsilon_2) \in (\gamma(\varepsilon_2), 0) \subset (-\delta, 0)$ такое, что

$$\operatorname{sgn} \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \beta(\varepsilon_2)) \text{ для всех } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (-\delta_0, 0) \times (0, \delta). \quad (27)$$

Из (24) и (27) по теореме о неявной функции следует, что $\beta(\cdot) \in C^1$. Так как $\gamma(+0) = 0$, то и $\beta(+0) = 0$.

Определим множества V_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) и E_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) так, как сформулировано в теореме. Аналогично случаю $\varepsilon = 0$ доказывается, что все траектории поля X_{ε} , $\varepsilon \in V_3$, проходящие через точки дуги l_{ε}^1 с параметром $\tilde{x}(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) < u < \rho$, ω -предельны к контуру $\Gamma_+(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in E_2 \cup V_2 \cup E_3$ из (7), (27) и (22) получаем $f(u_+(\varepsilon) + 0, \varepsilon) > u_+(\varepsilon)$. Отсюда и из (19) следует, что $f(\cdot, \varepsilon)$ имеет на интервале $(u_+(\varepsilon), \rho)$ неподвижную точку. Вследствие леммы дугу $l_{\varepsilon, \rho}^1$ пересекает единственная замкнутая траектория – грубый устойчивый предельный цикл. Из (27) и (22) также имеем

$$f(\tilde{x}(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) + 0, \varepsilon) < \tilde{x}(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) \text{ при всех } \varepsilon \in E_4. \quad (28)$$

Из (19), (28) и леммы следует, что предположение о существовании замкнутой траектории, пересекающей дугу $l_{\varepsilon, \rho}^1$, приводит к противоречию.

При $\varepsilon \in B_1$ выходящая сепаратриса седла $O_1(\varepsilon)$ идет в седло $O_2(\varepsilon)$, образуя вместе с дугой линии F между этими седлами, контур $\Gamma_+(\varepsilon)$. Как и при $\varepsilon = 0$ траектории, пересекающие дугу $l_{\varepsilon, \rho}^1$, ω -предельны к $\Gamma_+(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in B_5 \cup E_5 \cup E_1$ $\psi_2(\varphi_1(0, \varepsilon), \varepsilon) < 0$. Поэтому функция $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на интервале $(l(\varepsilon), \rho)$, где $l(\varepsilon) = \psi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(0, \varepsilon), \varepsilon)$, и $f(l(\varepsilon) + 0, \varepsilon) = 0 < l(\varepsilon)$. Отсюда, из (19) и леммы следует отсутствие замкнутых траекторий поля X_ε в U .

Список литературы

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. Takens F. Singularities of vector fields // *Publ. Math. IHES.* 1974. Vol. 43. P. 47–100.
3. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // *Математический сборник.* 1983. Т. 120, № 4. С. 473–499.
4. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory.* Springer-Verlag, 1988. 552 p.
5. Николаев Е. В. Бифуркации предельных циклов дифференциальных уравнений, допускающих инволютивную симметрию // *Математический сборник.* 1995. Т. 186, № 4. С. 143–160.
6. Шноль Э. Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений // *Математический сборник.* 2000. Т. 191, № 8. С. 141–157.
7. Лерман Л. М., Тураев Д. В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах // *Нелинейная динамика.* 2012. Т. 8, № 2. С. 323–343.
8. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика.* 2021. Т. 13, № 3. С. 39–46.
9. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. Ч. 1. 416 с.
10. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.
11. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. Ч. 2. 548 с.

References

1. Arnol'd V.I. *Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy = Additional chapters on the theory of ordinary differential equations.* Moscow: Nauka, 1978:304. (In Russ.)
2. Takens F. Singularities of vector fields. *Publ. Math. IHES.* 1974;43:47–100.
3. Zholondek Kh. On the versality of one family of symmetric vector fields on the plane. *Matematicheskij sbornik = Mathematical collection.* 1983;120(4):473–499. (In Russ.)
4. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory.* Springer-Verlag, 1988:552.
5. Nikolaev E.V. Bifurcations of limit cycles of differential equations admitting involutive symmetry. *Matematicheskij sbornik = Mathematical collection.* 1995;186(4):143–160. (In Russ.)

6. Shnol' E.E. Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibrium positions of ordinary differential equations. *Matematicheskiy sbornik = Mathematical collection*. 2000;191(8):141–157. (In Russ.)
7. Lerman L.M., Turaev D.V. On symmetry loss bifurcations in reversible systems. *Nelineynaya dinamika = Nonlinear dynamics*. 2012;8(2):323–343. (In Russ.)
8. Roytenberg V.Sh. Bifurcations of a polycycle formed by two loops of separatrices of a non-rough saddle of a dynamic system with central symmetry. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Fizika = Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics*. 2021;13(3):39–46. (In Russ.)
9. Shil'nikov L.P., Shil'nikov A.L., Turaev D.V., Chua L. *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike = Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*. Moscow; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2004;1:416. (In Russ.)
10. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Teoriya bifurkatsiy dinamiicheskikh sistem na ploskosti = Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Moscow: Nauka, 1967:488. (In Russ.)
11. Shil'nikov L.P., Shil'nikov A.L., Turaev D.V., Chua L. *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike = Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*. Moscow; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2009;2:548. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Шлеймович Ройтенберг

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры высшей
математики, Ярославский
государственный технический
университет (Россия, г. Ярославль,
Московский проспект, 88)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Vladimir Sh. Roitenberg

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department of higher
mathematics, Yaroslavl State Technical
University (88 Moskovskiy avenue,
Yaroslavl, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 13.06.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 18.09.2023

Принята к публикации / Accepted 02.11.2023

УДК 531.332.3

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-6

Новый подход к задаче о брахистохроне с учетом сухого трения

С. О. Гладков

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), Москва, Россия

sglad51@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Предложен новый вариационный подход к решению задачи о брахистохроне, целью которого является математически строгое обоснование всех основных уравнений динамического движения тела в подвижном базисе. Актуальность темы исследования продиктована прежде всего новизной поставленной задачи и методики ее решения. *Материалы и методы.* Метод решения основан на использовании подвижного базиса и вариационного подхода. *Результаты.* Получена строго обоснованная с помощью вариационного подхода система дифференциальных уравнений, описывающая оптимальную траекторию движения тела в подвижном базисе. *Выводы.* Предложен общий алгоритм решения подобного рода задач.

Ключевые слова: брахистохрона, сухое трение, уравнение движения, вариационный принцип

Для цитирования: Гладков С. О. Новый подход к задаче о брахистохроне с учетом сухого трения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 64–75. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-6

A new approach to brachistochrone problem with an account dry friction

S.O. Gladkov

Moscow aviation institute (National Research University), Moscow, Russia

sglad51@mail.ru

Abstract. *Background.* The study proposes a new variational approach to solving the problem of the brachistochrone the purpose of which is to mathematically rigorously substantiate all the basic equations of the dynamic motion of a body in a mobile basis. The relevance of the research topic is dictated primarily by the novelty of the task and the methodology of its solution. *Materials and methods.* The solution method is based on the use of a moving basis and a variational approach. *Results.* A general fundamental solution of the two-dimensional Laplace equation for a function dependent on three independent coordinates is obtained. *Conclusions.* A system of differential equations strictly substantiated with the help of the variational approach describing the optimal trajectory of the body's motion in a mobile basis has been obtained.

Keywords: brachistochrone, dry friction, equation of motion, variational principle

For citation: Gladkov S.O. A new approach to brachistochrone problem with an account dry friction. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):64–75. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-6

Введение

Задачу, о которой сейчас пойдет речь, нельзя отнести к новой области исследования, поскольку этой проблемой занимаются уже более трехсот лет – начиная со времен Я. Бернулли и Л. Эйлера. Первая классическая постановка задачи о брахистохроне в идеальном случае, когда тело движется по кривой наискорейшего спуска под действием одной лишь силы тяжести (без учета каких-либо диссипативных сил) была сформулирована им в 1696 г. Позднее, как известно (см., например, [1–3]), с помощью разработанного Л. Эйлером математического аппарата, который в современной трактовке называется методом вариационного исчисления, эта задача была решена аналитически и получено параметрическое представление формы траектории, описывающее брахистохрону.

В последнее время (примерно с середины 50-х гг. прошлого столетия) интерес к этой проблеме оживился с новой силой, что ознаменовалось множеством опубликованных работ, в которых задача о брахистохроне решалась с различных точек зрения и в разных постановках, в том числе и с учетом сил сухого, а также вязкого трения (см. работы [4–12]). В этой связи интересно обратить внимание на следующий факт. В отмеченных оригинальных исследованиях решение задачи приводилось с помощью разных методических подходов, среди которых можно выделить четыре основных: метод управляющего параметра, метод интегральных уравнений, метод подвижного базиса и вариационный принцип. Все четыре метода позволяют найти решение задачи, и они качественно довольно похожи друг на друга.

Формально, на наш взгляд, более информативным является метод подвижного базиса, который позволяет получить не только траекторию движения (т.е. форму желоба), но также вычислить еще и ряд других, не менее важных зависимостей. К ним, прежде всего, можно отнести зависимость от времени угла наклона α между касательной и осью x , а также силу реакции желоба в виде некоторой функции от времени (см. работы [10, 11]).

Вариационный подход и подвижный базис

Геометрию задачи удобно представить с помощью рис. 1, на котором изображены все основные физические характеристики задачи.

На рис. 1 схематически изображена также сила Магнуса, которая всегда проявляет себя в условиях криволинейной движения вращающегося с определенной частотой сферического тела (аналитическое объяснение этой силы см. в [13]). Ввиду малости частоты вращения этой силой обычно пренебрегают.

Основная идея заключается в следующем. Несмотря на тот факт, что мы будем использовать хорошо известные принципы вариационного исчисления, алгоритм предложенного ниже решения существенно отличается от классического подхода, подробно изложенного в монографии [1]. Действительно, пусть имеется функционал времени

$$t = \int_l \frac{dl}{v}, \quad (1)$$

где dl – элемент длины траектории; v – скорость тела.

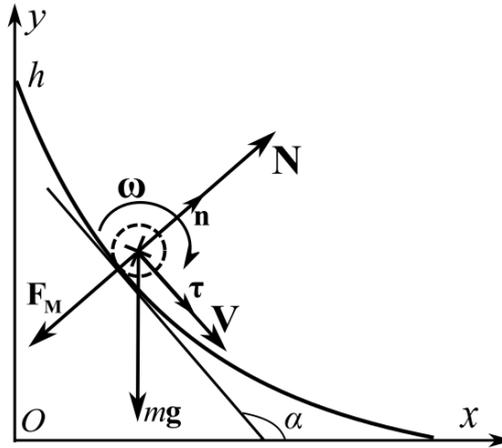


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи в общем случае

В отличие от классического функционала, а именно такого:

$$t\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2g(H-y)}}, \quad (2)$$

мы будем искать вариацию непосредственно функционала (1).

Имеем для него

$$\delta t = \int_l \left(\frac{d\delta l}{v} + dl \delta \left(\frac{1}{v} \right) \right) = \int_l \left(\frac{d\delta l}{v} - dl \frac{\delta v}{v^2} \right). \quad (3)$$

В силу очевидных равенств

$$v^2 = \mathbf{v}^2, \quad dl^2 = d\mathbf{r}^2$$

находим

$$v\dot{v} = \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}, \quad dld\delta l = d\mathbf{r} \cdot d\delta\mathbf{r}.$$

Откуда

$$\dot{v} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{v}}, \quad d\delta l = \boldsymbol{\tau} \cdot d\delta\mathbf{r}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения.

Учитывая также, что

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \cdot v. \quad (5)$$

Из (3) с учетом (4) получаем

$$\delta t = \int_l \left(\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot d\delta\mathbf{r}}{v} - dl \frac{\delta v}{v^2} \right) = \int_l \left(d \left(\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{r}}{v} \right) - \delta\mathbf{r} d \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{v} \right) - dl \frac{\nabla v \cdot \delta\mathbf{r}}{v^2} \right).$$

Интеграл от первого слагаемого в правой части, который представляет собой полный дифференциал, исчезает благодаря условию неподвижности граничных точек, и мы получаем с учетом (4):

$$\begin{aligned} \delta t &= -\int_l \left(\delta \mathbf{r} d \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{v} \right) + dl \frac{\nabla v \cdot \delta \mathbf{r}}{v^2} \right) = -\int_l \left(\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} \frac{1}{v} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{v^3} \dot{v} \right) + \frac{\nabla v}{v^2} \right) \cdot \delta \mathbf{r} dl = \\ &= -\int_l \left(\frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{v})}{v^2} + \frac{\nabla v}{v} \right) \cdot \frac{\delta \mathbf{r} dl}{v} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Согласно уравнениям Гамильтона

$$\dot{v} = -\frac{\nabla U}{m} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

где m – масса тела.

Поэтому из (6) согласно основной лемме вариационного исчисления [1] следует, что

$$\frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F})}{m v^2} + \frac{\nabla v}{v} = 0. \quad (7)$$

Поскольку под силой \mathbf{F} следует подразумевать все действующие на тело силы, то для нее в рамках нашей задачи имеем

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{fr}, \quad (8)$$

где $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$ – сила реакции желоба; $\mathbf{g} = g(\mathbf{n} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau} \sin \alpha)$ – ускорение силы тяжести; $\mathbf{F}_{fr} = -F_{fr}\boldsymbol{\tau}$ – сила трения, направленная против направления движения тела.

В подвижном базисе $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ градиент скорости, фигурирующий в уравнении (7), можно представить как

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau}, \quad (9)$$

где $\frac{\partial v}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к траектории; $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial v}{\partial l}$ – производная по касательной к траектории.

Таким образом, с учетом (9) и всего сказанного векторное уравнение (7) приобретает следующий вид:

$$\frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{\boldsymbol{\tau} \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \left(N\mathbf{n} + mg(\mathbf{n} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau} \sin \alpha) - F_{fr}\boldsymbol{\tau} \right) \right)}{m v^2} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau} \right) = 0. \quad (10)$$

Проектируя уравнение (10) на базис $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$, немедленно приходим к двум уравнениям:

$$\begin{cases} v \frac{\partial v}{\partial l} = g \sin \alpha - \frac{F_{fr}}{m}, \\ \frac{v}{R} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Производные по направлениям нормали и касательной следует раскрыть в явном виде согласно их общим определениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial v}{\partial y} \cos \alpha, \\ \frac{\partial v}{\partial l} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v = -\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Поскольку

$$v = R\dot{\alpha}, \quad (13)$$

то согласно (12) с учетом (13) уравнения (11) переходят в следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{F_{fr}}{m} = g \sin \alpha + v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha \right), \\ \dot{\alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial v}{\partial y} \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Как видим из (14), наша задача сейчас свелась к формальному вычислению частных производных от модуля скорости по координатам. Чтобы их найти, мы можем воспользоваться законом сохранения энергии, который с учетом силы трения гласит:

$$\frac{m v^2}{2} + mgy - \int_0^x F_{fr} \sqrt{1 + y'^2} dx = mgH, \quad (15)$$

где

$$F_{fr} = \mu N = \mu m \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right). \quad (16)$$

С учетом (16) из (15) следует

$$\frac{v^2}{2} + gy + \mu \int_0^x \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right) \frac{dx}{|\cos \alpha|} = gH. \quad (17)$$

Отсюда немедленно получаем, что

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\mu}{|\cos \alpha|} \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right), \quad v \frac{\partial v}{\partial y} = -g. \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения (14), будем иметь

$$\begin{cases} \frac{F_{fr}}{m} = \mu \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right), \\ v \dot{\alpha} + \mu tg \alpha \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right) + g \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Верхнее уравнение в (19) совпадает с (16), как и должно быть, а нижнее с учетом (13) приводится к виду

$$v \dot{\alpha} (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) + g (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = 0.$$

То есть

$$v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha \frac{(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}{(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (20)$$

Здесь необходимо заметить, что уравнение (20) при $\mu = 0$ чисто гипотетически впервые было предложено в работе [9]¹.

Если учесть теперь уравнение движения и формулу (16), то получим

$$\dot{v} + \mu v \dot{\alpha} = g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha). \quad (21)$$

С учетом уравнения (20) мы приходим, следовательно, к интересующей нас системе:

$$\begin{cases} \dot{v} = g \cos \alpha \frac{[(\operatorname{tg} \alpha + \mu)(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) + 1 - \mu \operatorname{tg} \alpha]}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}, \\ v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha \frac{(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}{(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)}. \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, что если $\mu = 0$, то верхнее уравнение в (22) переходит в хорошо известное уравнение движения под действием одной силы тяжести: $\dot{v} = g \sin \alpha$ (см. работы [9, 10]).

Если теперь верхнее уравнение поделить на нижнее, то найдем

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\alpha} = - \frac{(\mu + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) + \mu(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}. \quad (23)$$

Интегрируя уравнение (23), после довольно громоздких преобразований приходим к следующему весьма компактному решению:

$$v = -C_1 \frac{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2}{\cos \alpha}, \quad (24)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Согласно нижнему уравнению в системе (22) приходим к такому уравнению для его определения:

$$C_1 \dot{\alpha} = \frac{g}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

После интегрирования получаем неявную зависимость $\alpha(t)$:

¹ В статье [12] была допущена досадная оплошность: перед формулой (7) приведена неверная ссылка на статью авторов А. А. Barsuk, F. Paladi, на самом деле она относится к работе [11].

$$t = C_1 \left[(1 + \mu^2)(\alpha - \alpha_1) - \mu^2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_1) \right], \quad (25)$$

где угол α_1 определяется с помощью начального условия $\alpha(0) = \alpha_1$.

С учетом силы трения угол α должен подчиняться неравенству

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (26)$$

Форма траектории (желоба)

Чтобы определить искомую зависимость $y(x)$, обратимся к очевидным уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v \cos \alpha, \\ \dot{y} &= -v \sin \alpha. \end{aligned}$$

С учетом решения (24) после интегрирования находим отсюда

$$\begin{cases} x = - \int_{\alpha_1}^{\alpha} v \cos \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = \frac{C_1^2}{g} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha, \\ y = H - \int_{\alpha_1}^{\alpha} v \sin \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = H + \frac{C_1^2}{g} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha. \end{cases} \quad (27)$$

Благодаря подстановке $u = \operatorname{tg} \alpha$ интегралы в (27) легко вычисляются, в результате мы приходим к следующим интересующим нас решениям:

$$\begin{cases} x = \frac{C_1^2}{g} \left[(1 + 3\mu^2) \frac{\alpha - \alpha_1}{2} + \frac{1}{4} (1 - \mu^4) (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_1) + \right. \\ \left. + \mu (1 + \mu^2) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_1) - 2\mu^3 \ln \left| \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} \right| - \mu^4 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_1) \right], \\ y = H + \frac{C_1^2}{g} \left[\frac{(1 - \mu^4)}{2} (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha) - \right. \\ \left. - \mu (1 + 3\mu^2) (\alpha - \alpha_1) + \frac{1}{2} \mu (1 + \mu^2) (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_1) + \right. \\ \left. + 2\mu^3 \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{\mu}{4} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha_1) \right) + 2\mu^4 \ln \left| \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} \right| \right]. \end{cases} \quad (28)$$

Таким образом, найденная параметрическая зависимость (28) позволяет определить интересующую нас форму желоба при учете сил сухого трения. С целью графического построения зависимости $y(x)$ нам необходимо установить значения углов α_1, α_2 , чтобы можно было более наглядно проиллюстрировать параметрическое решение (28).

Вычисление углов α_1, α_2 и приближенное решение

Угол α_1 находится сравнительно легко. В самом деле, с помощью начального условия

$$\ddot{y}|_{\alpha=\alpha_1} = -g$$

и с учетом равенства $\dot{y} = -v \sin \alpha$, согласно которому в соответствии с (22) $\dot{v}|_{\alpha=\alpha_1} = g(\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1)$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}|_{\alpha=\alpha_1} &= (-\dot{v} \sin \alpha + v \dot{\alpha} \cos \alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = \\ &= -g(\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1) \sin \alpha_1 = -g, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\mu}, \quad (29)$$

и, значит,

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = -\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \\ \sin \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}. \end{cases} \quad (30)$$

Угол α_2 и константу C_1 несложно найти из двух дополнительных условий, которые непосредственно следуют из решений (28).

Действительно, поскольку решается вариационная задача с неподвижными границами, т.е. точки начала движения $M_0 = M(0, H)$ и окончания движения $M_1\left(\frac{\pi H}{2}, 0\right)$ неподвижны, мы имеем право воспользоваться еще двумя условиями:

$$x|_{\alpha=\alpha_2} = \frac{\pi H}{2}, \quad y|_{\alpha=\alpha_2} = 0. \quad (31)$$

Исходя из уравнений (28) в соответствии с (31) можно вычислить обе независимые переменные α_2 и C_1 . В общем виде решение трансцендентных уравнений (31) невозможно. Однако с точки зрения аналитического определения этих двух констант положение «спасает» формальное присутствие коэффициента трения в высоких степенях. Действительно, поскольку коэффициент трения μ практически всегда мал, то его значение, начиная от второй степени, оказывается значительно меньшим единицы.

Сказанное означает, что общие решения (28) мы можем существенно упростить и с учетом равенств (29), (30) в линейном по μ приближении можем представить их в значительно более простой форме, т.е. в виде

$$\begin{cases} x \approx \frac{C_1^2}{2g} \left[\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \mu (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right], \\ y \approx H - \frac{C_1^2}{2g} \left[\cos^2 \alpha + 2\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right]. \end{cases} \quad (32)$$

Полагая, что $C_1^2 = 2gHb$, где безразмерную постоянную b следует определить, имеем из (33):

$$\begin{cases} X = \frac{x}{H} \approx b \left[\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \mu (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right], \\ Y = \frac{y}{H} \approx b \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) - 2\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right]. \end{cases} \quad (33)$$

Согласно условиям (31) благодаря решениям (33) мы приходим к системе уравнений, из которых однозначно находятся интересующие нас постоянные b и α_2 .

В результате имеем

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 + \mu (1 + 2 \cos^2 \alpha_2) \approx \frac{\pi}{2b}, \\ \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_2) - 2\mu \left(\alpha_2 - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 \right) \approx 0. \end{cases} \quad (34)$$

В линейном по μ приближении с учетом соотношений (30), в соответствии с которыми следует считать, что $\alpha_1 \approx \frac{\pi}{2} + \mu$, а угол α_2 ищем в виде

$$\alpha_2 = \pi - \lambda, \quad (35)$$

где параметр λ необходимо оценить.

В результате уравнения (34) переходят в такую систему:

$$\begin{cases} b \approx \frac{\pi}{2 \left(\frac{\pi}{2} - \lambda + \sin \lambda \cos \lambda + 2\mu \cos^2 \lambda \right)}, \\ \sin^2 \lambda \approx 2\mu \left(\frac{\pi}{2} - \lambda - \mu + \sin \lambda \cos \lambda \right). \end{cases} \quad (36)$$

Считая, что $\lambda \ll 1$, из нижнего уравнения системы (36) благодаря приближенным соотношениям

$$\sin \lambda \approx \lambda, \quad \cos \lambda \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2} \approx 1$$

находим интересующее нас решение

$$\lambda \approx \sqrt{\pi\mu}. \quad (37)$$

Значение же постоянной b тогда согласно верхнему уравнению в (36) будет

$$b \approx \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\mu}. \quad (38)$$

В соответствии с найденными решениями (37) и (38) параметрические зависимости (34) можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} X \approx \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\mu} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + 2\mu \cos^2 \alpha \right), \\ Y \approx \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\mu} \left[\sin^2 \alpha - 2\mu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \mu - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right]. \end{cases} \quad (39)$$

Еще раз подчеркнем, что решение (39) является приближенным, поскольку мы считали, что μ мало, т.е. $\mu \ll 1$. Однако, если это условие не соблюдается, то точное решение следует искать исходя из общих уравнений, которые согласно условиям (31) приводят нас к такой трансцендентной системе уравнений:

$$\begin{cases} (1 + 3\mu^2)(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2}(1 - \mu^4)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) + \\ + 2\mu(1 + \mu^2)(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) - 2\mu^3 \ln \left| \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \right| - \mu^4 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = \frac{\pi}{2b}, \\ 1 + (1 - \mu^4)(\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) - 2\mu(1 + 3\mu^2)(\alpha_2 - \alpha_1) + \\ + \mu(1 + \mu^2)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) + 4\mu^3 \left(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{\mu}{4}(\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1) \right) + \\ + 4\mu^4 \ln \left| \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \right| = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Точное решение уравнений (40) с учетом (29), (30) и (35) может быть найдено лишь численно.

Результаты и обсуждение

Резюмируя все вышеизложенное, отметим следующее:

1. С помощью вариационного подхода получена точная и математически строго обоснованная система уравнений, основанная на уравнении (20).
2. Предложенный подход базируется на впервые предложенном вариационном принципе, использующем функционал (1), в отличие от всех предыдущих подходов, основанных на функционале (2).
3. Изложенный метод позволил получить строго обоснованную (а не гипотетически предложенную в работах [11, 12]) систему точных уравнений (19).

4. В линейном приближении по коэффициенту трения μ найдено параметрическое решение уравнений (19) в виде (39), совпадающее с решением (19) из работы [12].

Список литературы

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М. : Мир, 1974. 488 с.
3. Гельфад И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М. : Физматгиз, 1961. 284 с.
4. Гладков С. О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164101-1-5.
5. Lipp S. C. Brachistochrone with Coulomb friction // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, № 2. P. 562–584.
6. Hayen J. C. Brachistochrone with Coulomb friction // Int. J. Non-Linear Mech. 2005. Vol. 40, № 8. P. 1057–1075.
7. Гладков С. О., Богданова С. Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101.
8. Ashby N., Brittin W. E., Love W. F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction // American Journal of Physics. 1975. Vol. 43. P. 902–905.
9. Гладков С. О., Богданова С. Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101.
10. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245, № 4. P. 528–537.
11. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 257, № 1. P. 27–30.
12. Гладков С. О. Точное решение задачи о брахистохроне с учетом сил сухого трения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 3–10.
13. Гладков С. О. К вопросу о выводе силы Магнуса // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 507. С. 20–23. doi: 10.1134/S1028335822110040

References

1. El'sgol'ts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie = Differential equations and calculus of variations*. Moscow: Nauka, 1969:424. (In Russ.)
2. Yang L. *Leksii po variatsionnomu ischisleniyu i teorii optimal'nogo upravleniya = Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*. Moscow: Mir, 1974:488. (In Russ.)
3. Gel'fad I.M., Fomin S.V. *Variatsionnoe ischislenie = Calculus of variations*. Moscow: Fizmatgiz, 1961:284. (In Russ.)
4. Gladkov S.O. On the trajectory of a body entering a liquid at an arbitrary angle. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU = Proceedings of MSU faculty of physics*. 2016;(4):164101-1-5. (In Russ.)
5. Lipp S.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *SIAM J. Control Optim.* 1997;35(2):562–584.

6. Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2005;40(8):1057–1075.
7. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Generalized dynamic equations of plane curvilinear motion of a material body along a chute taking into account friction forces (their numerical analysis in some special cases). *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU = Proceedings of MSU faculty of physics.* 2017;(1):171101. (In Russ.)
8. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction. *American Journal of Physics.* 1975;43:902–905.
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometric phase transition in the brachistochrone problem. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU = Proceedings of MSU faculty of physics.* 2016;(1):161101. (In Russ.)
10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020;245(4):528–537.
11. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021;257(1):27–30.
12. Gladkov S.O. Precise solution of the brachistochrone curve problem taking into account dry friction forces. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(2):3–10. (In Russ.)
13. Gladkov S.O. On the issue of withdrawing Magnus's power. *Doklady RAN. Fizika, tekhnicheskie nauki = Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, engineering sciences.* 2022;507:20–23. (In Russ.). doi: 10.1134/S1028335822110040

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Октябринович Гладков

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4)

E-mail: sglad51@mail.ru

Sergey O. Gladkov

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the sub-department No. 311 of applied software and mathematical methods, Moscow aviation institute (National Research University) (4 Volokolamskoye highway, Moscow, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 15.06.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 12.01.2024

Принята к публикации / Accepted 03.02.2024

УДК 519.64

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-7

Применение непрерывного метода решения операторных уравнений к приближенному решению амплитудно-фазовой проблемы

И. В. Бойков¹, А. А. Пивкина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²nastyashaldaeva@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматриваются приближенные методы решения фазовой проблемы для одномерных и двумерных сигналов, а также случаи непрерывных и дискретных сигналов. Решение фазовой проблемы состоит из двух этапов. На первом этапе по известной амплитуде спектра восстанавливается исходный сигнал. На втором этапе вычисляется преобразование Фурье восстановленного сигнала и приближенно вычисляется фаза спектра сигнала. *Материалы и методы.* Построение и обоснование вычислительной схемы базируется на непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений, основанном на теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод устойчив при возмущениях параметров математической модели и при решении нелинейных операторных уравнений, не требует обратимости производных Гато (или Фреше) нелинейных операторов. *Результаты и выводы.* Для восстановления исходного сигнала предложены сплайн-коллокационные схемы со сплайнами нулевого и первого порядков. Вычислительные схемы реализуются непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений.

Ключевые слова: амплитудно-фазовая проблема, некорректные задачи, непрерывный операторный метод, численные методы

Для цитирования: Бойков И. В., Пивкина А. А. Применение непрерывного метода решения операторных уравнений к приближенному решению амплитудно-фазовой проблемы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 76–95. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-7

Application of the continuous method for solving operator equations to the approximate solution of the amplitude-phase problem

I.V. Boykov¹, A.A. Pivkina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

²nastyashaldaeva@mail.ru

Abstract. *Background.* The article is devoted to approximate methods for solving the phase problem for one-dimensional and two-dimensional signals. The cases of continuous and discrete signals are considered. The solution of the phase problem consists of two stages. At the first stage, the original signal is restored. At the second stage, the Fourier transform of the reconstructed signal is calculated and the phase of the signal spectrum is approximately calculated. *Materials and methods.* The construction and justification of the computing scheme is based on a continuous method for solving nonlinear operator equations, based on the theory of stability of solutions to ordinary differential equation systems. The method is stable under perturbations of the parameters of the mathematical model and, when solving nonlinear operator equations, does not require the reversibility of the Gato (or Freshe) de-

derivatives of nonlinear operators. *Results and conclusions.* To restore the original signal, spline-collocation schemes with splines of zero and first orders are proposed. Computing schemes are implemented by a continuous method for solving nonlinear operator equations.

Keywords: amplitude-phase problem, ill-posed problems, continuous method for solving operator equations, numerical methods

For citation: Boykov I.V., Pivkina A.A. Application of the continuous method for solving operator equations to the approximate solution of the amplitude-phase problem. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):76–95. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-7

Введение

В различных областях прикладной физики, технологий, медицине и биологии прогресс в предметных исследованиях непосредственно связан с решением фазовой проблемы [1, 2], заключающейся в восстановлении фазы спектра сигнала по амплитуде его спектра. Определение амплитуды спектра сигнала по фазе его спектра и фазы спектра сигнала по амплитуде его спектра является амплитудно-фазовой проблемой. Исследованию фазовой проблемы посвящена обширная литература, достаточно подробные обзоры которой содержатся в работах [1–7]. В этих работах рассматривается амплитудно-фазовая проблема как в непрерывной, так и в дискретной постановке. Аналогичные проблемы возникают при восстановлении сигналов и изображений, при решении обратных задач спектроскопии [8, 9].

Несмотря на это, амплитудно-фазовая проблема далека от своего решения даже в одномерном случае. Поэтому задача приближенного решения амплитудно-фазовой проблемы остается актуальной.

В данной работе предложен численный метод восстановления одномерных и двумерных сигналов по амплитудам их спектров. Он основан на применении обобщенного непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений [10]. Восстановив сигнал и вычислив его Фурье-преобразование, находим фазу его спектра.

1. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

Приведем определения, используемые в статье.

Пусть X – банахово пространство; K – оператор, действующий из X в X ; $B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K , определяемая [11] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1) / h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Основные свойства логарифмической нормы приведены в [11, 12].

Рассмотрим уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (1)$$

где $A(x)$ – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в X . Обозначим через x^* решение уравнения (1).

Уравнению (1) поставим в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

Теорема 1.1 [10]. Пусть уравнение (1) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве X , справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (3)$$

Тогда решение задачи Коши (2) сходится к решению x^* уравнения (1) при любом начальном приближении $x(0) \in B$.

Теорема 1.2 [10]. Пусть уравнение (1) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$ банахова пространства X , выполняются следующие условия:

1) при любом $t (t > 0)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0; \quad (4)$$

2) справедливо неравенство (3).

Тогда решение задачи Коши (2) сходится к решению уравнения (1) при любом начальном приближении $x(0) \in B(x^*, r)$.

Замечание. В неравенстве (3) каждой кривой $g(t)$ отвечает соответствующая константа $\alpha_g > 0$.

В случае, если условия (3), (4) не выполняются, возможно следующее обобщение непрерывного операторного метода.

Обозначим через $A'(x)$ производную Гато (Фреше) оператора $A(x)$. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$(A'(x))^* A(x) - (A'(x))^* f = 0, \quad (5)$$

где $(A'(x))^*$ оператор, сопряженный с $A'(x)$.

Уравнению (5) поставим в соответствие задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = - \left[(A'(x))^* A(x) - (A'(x))^* f \right], \quad x(0) = x_0. \quad (6)$$

Теорема 1.3. Пусть оператор $(A'(x))^* A(x)$ действует из банахова пространства X в X , уравнение (5) имеет единственное решение x^* в шаре $B(x^*, r)$, $r > 0$. Пусть следующие условия справедливы для любой дифференцируемой кривой $g(t)$, лежащей в шаре $B(x^*, r)$:

1) для любого $t (t > 0)$ справедливо неравенство

$$\int_0^t \Lambda \left((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)) \right) d\tau \geq 0; \quad (7)$$

2) выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda \left((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)) \right) d\tau \geq \alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (8)$$

Тогда решение задачи Коши (6) сходится к решению x^* уравнения (5) при любом начальном значении $x(0) \in B(x^*, r)$.

В случае, если неравенства (7), (8) не выполняются, то естественно провести стабилизацию решения дифференциального уравнения (5), введя стабилизирующую функцию $\alpha(t)$ со следующими свойствами:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$;
- 2) при всех $t \in [0, \infty)$ $\alpha(t) \geq 0$.

Уравнению (5) поставим в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) - \left[(A'(x))^* A(x) - (A'(x))^* f \right], \quad x(0) = x_0. \quad (9)$$

Теорема 1.4. Пусть уравнение (5) имеет единственное решение x^* в шаре $B(x^*, r)$, $r > 0$, банахова пространства X . Пусть следующие условия справедливы для любой дифференцируемой кривой $g(t)$, лежащей в шаре $B(x^*, r)$:

1) при $t > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda \left(\alpha(\tau) + (A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)) \right) d\tau \geq 0;$$

2) выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda \left(\alpha(\tau) + (A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau)) \right) d\tau \geq \alpha_g, \quad \alpha_g > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (9) сходится к решению x^* уравнения (5) при любом начальном значении $x(0) \in B(x^*, r)$.

Ниже будут использованы следующие утверждения о разрешимости матричных и операторных уравнений.

Пусть A, B – квадратные матрицы порядка n с комплексными элементами и $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ – n -размерные векторы с комплексными компонентами. Рассмотрим следующие системы алгебраических уравнений: $Ax = \xi$ и $Bu = \eta$. Норма вектора и подчиненная ему операторная норма матрицы фиксируются; логарифмическая норма $\Lambda(A)$ соответствует операторной норме.

Теорема 1.5 [13]. Если $\Lambda(A) < 0$, то матрица A невырожденная и

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Lambda(A)|}.$$

Теорема 1.6 [13]. Пусть $Ax = \xi$, $Bu = \eta$ и $\Lambda(A) < 0$, $\Lambda(B) < 0$, тогда

$$\|x - y\| \leq \frac{\|\xi - \eta\|}{|\Lambda(B)|} + \frac{\|A - B\|}{|\Lambda(A)\Lambda(B)|}.$$

Рассмотрим в банаховом пространстве X нелинейное уравнение $K(x) = 0$, где K – нелинейный оператор, действующий из X в X .

Теорема 1.7 [14]. Пусть в сфере $\|x - x_0\| \leq \frac{A}{1 - 2\varepsilon} \|K(x_0)\|$ ($0 < \varepsilon < 1/2$) существует линейная производная Гато $K'(x)$, причем линейный оператор $K'(x)$ имеет обратный $(K'(x))^{-1}$, для которого выполнено неравенство $\|(K'(x))^{-1}\| \leq A$. Тогда уравнение $K(x) = 0$ имеет решение в сфере $\|x - x_0\| \leq A$.

2. Восстановление функции по амплитуде ее спектра

2.1. Одномерный случай

Пусть $f(t) \in C[0, a]$ – неизвестная функция. Требуется восстановить функцию $f(t) \in [0, a]$, располагая информацией о модуле ее спектра $A(\omega) = |F(\omega)|$, где $F(\omega)$ – преобразование Фурье функции $f(t)$.

Математическая задача ставится следующим образом. Нужно решить нелинейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(t) e^{i\omega t} dt \right| = A(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (10)$$

располагая информацией о функции $A(\omega)$.

Отметим, что решение уравнения (10) неоднозначно. Наряду с решением $f^*(t)$ оно имеет решение $f^*(t)e^{i\pi k/2}$, $k = 0, 1, \dots$, т.е. возможно восстановление функции $f(t)$ с точностью до сомножителей ± 1 , $\pm i$. Отметим [3], что аналогичная ситуация имеет место и при решении амплитудно-фазовой проблемы. Таким образом, ставится задача о приближенном нахождении частного решения уравнения (10).

Приближенное решение ищется в виде полигона $x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \psi_k(t)$

с базисными функциями

$$\psi_0(t) = 1 - \frac{n}{a}t, \quad 0 \leq t \leq \frac{a}{n},$$

$$\psi_k(t) = \begin{cases} -k + 1 + \frac{n}{a}t, & \frac{(k-1)a}{n} \leq t \leq \frac{ka}{n}, \\ k + 1 - \frac{n}{a}t, & \frac{ka}{n} \leq t \leq \frac{(k+1)a}{n}, \end{cases} \quad k = \overline{2, n-1},$$

$$\psi_n(t) = -n + 1 + \frac{n}{a}t, \quad \frac{(n-1)a}{n} \leq t \leq a.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ находятся из системы уравнений

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^a \psi_k(t) e^{i\omega_l t} dt \right| = A(\omega_l), \quad l = \overline{0, n}, \quad (11)$$

где $\omega_l = -D + \frac{2D}{n}l$, $l = \overline{0, n}$; D – число, определяемое неравенством

$$\sup_{\omega \in (-\infty, -D] \cup [D, \infty)} |A(\omega)| \leq 1/n.$$

Число D определяется из следующих соображений. Если искомая функция $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то погрешность ее аппроксимации сплайном $f_n(t)$ есть величина $O(n^{-1})$. Следовательно, при аппроксимации функции $A(\omega)$ достаточно ограничиться точностью $O(n^{-1})$.

Замечание. В качестве узлов ω_l можно взять $\omega_l = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n+2} + \frac{\pi l}{n+2} \right)$, $l = \overline{0, n}$.

Введем обозначения

$$g_{lk} = v_{lk} + iw_{lk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \psi_k(t) e^{i\omega_l t} dt$$

и перепишем систему (11) в следующем виде:

$$\left| \sum_{k=0}^n (v_{lk} + iw_{lk}) \alpha_k \right| = A(\omega_l), \quad l = \overline{0, n}.$$

Эту систему более удобно представить в виде

$$\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k \right)^2 \right]^{1/2} = A(\omega_l), \quad l = \overline{0, n}. \quad (12)$$

Остановимся на вопросе о разрешимости системы уравнений (12). Для определенности будем рассматривать систему уравнений (12) в $(n+1)$ -мерном пространстве R_{n+1} векторов $x = (x_0, \dots, x_n)$ с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq k \leq n} |x_k|$.

Возьмем в качестве начального значения элемент $\alpha^0 = (\alpha_0^0, \dots, \alpha_n^0)$ и исследуем вопрос о разрешимости системы (12) в окрестности α^0 . Для этого воспользуемся теоремой 1.7.

Запишем систему уравнений (12) в операторном виде $K(\alpha) = A$, где $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ и $A = (a_0, \dots, a_n)$, $a_i = A(\omega_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Производная Гато оператора $K(\alpha)$ на элементе α^0 описывается матрицей $Y(\alpha^0) = \{y_{lj}(\alpha^0)\}$ с элементами:

$$y_{lj}(\alpha^0) = \frac{\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k^0 \right) v_{lj} + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k^0 \right) w_{lj} \right]}{\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k^0 \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k^0 \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad l, j = \overline{0, n}.$$

Логарифмическая норма матрицы $Y(\alpha^0)$ в пространстве R_{n+1} с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq k \leq n} |x_k|$ равна

$$\Lambda(Y(\alpha^0)) = \max_{0 \leq l \leq n} \left[\operatorname{Re} y_{ll}(\alpha^0) + \sum_{j=0, j \neq l}^n |y_{lj}(\alpha^0)| \right].$$

Из теоремы Лозинского 1.5 следует, что если логарифмическая норма $\Lambda(Y(\alpha^0))$ отрицательна, то матрица $\Lambda(Y(\alpha^0))$ обратима и $\|(Y(\alpha^0))^{-1}\| \leq 1 / |\Lambda(Y(\alpha^0))|$. Тогда, если в сфере $\|x - \alpha^0\| \leq (1 + \delta) / |\Lambda(Y(\alpha^0))|$, $0 < \delta < \infty$, выполняется неравенство $\|Y(x)\| \leq 1 / |\Lambda(Y(\alpha^0))|$, то согласно теореме 1.7 в этой сфере существует решение системы (12).

Исследуем численные методы решения системы уравнений (12).

Если логарифмическая норма $\Lambda(Y(\alpha^0))$ отрицательная, то системе уравнений (12) поставим в соответствие задачу Коши:

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = \left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 \right]^{1/2} - A(\omega_l), \quad l = \overline{0, n}, \quad (13)$$

$$\alpha_l^0(0) = \alpha_l^0, \quad l = \overline{0, n}. \quad (14)$$

Теперь достаточно воспользоваться теоремой 1.2, из которой следует, что решение задачи Коши (13), (14) сходится к решению $x_n^*(t)$ системы (12).

В случае, если условие $\Lambda(Y(\alpha^0)) < 0$ не выполняется, но для производной Гато оператора, стоящего в левой части системы (12), выполняются

условия теоремы Адамара об обратимости матриц, то системе уравнений (12) следует поставить в соответствие задачу Коши:

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = -\gamma_l(u) \left(\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 \right]^{1/2} - A(\omega_l) \right), \quad l = \overline{0, n}, \quad (15)$$

$$\alpha_l^0(0) = \alpha_l^0, \quad l = \overline{0, n}, \quad (16)$$

$$\text{где } \gamma_l(u) = \operatorname{sgn} \left(\operatorname{Re} y_{ll}(\alpha(u)) + \sum_{j=0, j \neq l}^n |y_{lj}(\alpha(u))| \right).$$

В случае, если условия теоремы Адамара не выполняются, то для решения системы (12) естественно применить обобщение непрерывного метода решения операторных уравнений.

В этом случае системе (12) ставим в соответствие систему дифференциальных уравнений, которую более удобно записать в операторной форме.

Воспользуемся приведенными выше обозначениями:

$$\alpha(u) = (\alpha_0(u), \dots, \alpha_n(u)), \quad Y(\alpha(u)) = \{y_{lj}(\alpha(u))\},$$

$$y_{lj}(\alpha(u)) = \frac{\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(u) \right) v_{lj} + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(u) \right) w_{lj} \right]}{\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 \right]^{1/2}}$$

и введем обозначения: $G(\alpha(u)) = (g_0(\alpha(u)), \dots, g_n(\alpha(u)))^T$ – вектор-столбец,

$$\text{где } g_l(\alpha(u)) = \left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(u) \right)^2 \right]^{1/2}, \quad l = \overline{0, n} \text{ и } A = \{A(\omega_l)\}^T -$$

вектор-столбец.

Тогда система (12) записывается в виде операторного уравнения

$$G(\alpha(u)) = A$$

и соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d\alpha(u)}{du} = -\beta(u)\alpha(u) - (Y(\alpha(u)))^* (G(\alpha(u)) - A), \quad (17)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad (18)$$

где $\alpha_0 = (\alpha_0^0, \dots, \alpha_n^0)$; $\beta(u)$ – параметр регуляризации, $\beta(u) \geq 0$, $0 \leq u < \infty$,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \beta(u) = 0.$$

Для решения задач Коши (13), (14); (15), (16); (17), (18) можно использовать любой численный метод решения систем дифференциальных уравнений, в частности, методы Эйлера и Рунге – Кутты.

Для определенности опишем применение метода Эйлера к решению задачи Коши (13), (14).

Обозначим через h шаг метода Эйлера, тогда

$$\alpha_l(m+1) = \alpha_l(m) + h \left(\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(m) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(m) \right)^2 \right]^{1/2} - A(\omega_l) \right), \quad l = \overline{0, n}. \quad (19)$$

В случае, если условие $\Lambda(Y(\alpha^0)) < 0$ не выполняется, но для матрицы $Y(\alpha(u))$ в некотором шаре $B(0, r)$ выполняются условия теоремы Адамара об обратимости матриц, то следует перейти к системе дифференциальных уравнений (15), (16), которая решается по вычислительной схеме

$$\alpha_l(m+1) = \alpha_l(m) + h \gamma_l(m) \left(\left[\left(\sum_{k=0}^n v_{lk} \alpha_k(m) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n w_{lk} \alpha_k(m) \right)^2 \right]^{1/2} - A(\omega_l) \right), \quad l = \overline{0, n}, \quad (20)$$

где $\gamma_l(m) = -\operatorname{sgn} \left(\operatorname{Re} y_{ll}(\alpha(m)) + \sum_{j=0, j \neq l}^n |y_{lj}(\alpha(m))| \right)$, $l = \overline{0, n}$.

2.2. Двумерный случай

Требуется восстановить функцию $f(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in [0, a]^2$, по амплитуде $A(\omega_1, \omega_2) = |F(\omega_1, \omega_2)|$ ее спектра $F(\omega_1, \omega_2)$. Здесь $F(\omega_1, \omega_2)$ – преобразование Фурье функции $f(t_1, t_2)$.

Математическая задача ставится следующим образом. Требуется решить нелинейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_0^a f(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right| = A(\omega_1, \omega_2). \quad (21)$$

Разрешимость системы уравнений (21) исследуется по аналогии с одномерным случаем, и поэтому на этом вопросе не останавливаемся.

Приближенное решение уравнения (21) ищем в виде функции

$$f_N(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl} \Psi_{kl}(t_1, t_2),$$

где

$$\Psi_{kl}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & (t_1, t_2) \in \Delta_{kl}, \\ 0, & (t_1, t_2) \in [0, a]^2 \setminus \Delta_{kl}, \end{cases} \quad k, l = \overline{0, N-1},$$

$$\Delta_{kl} = \{(t_1, t_2) : t_1 \in [x_k, x_{k+1}], t_2 \in [x_l, x_{l+1}]\}, \quad k, l = \overline{0, N-2},$$

$$\Delta_{k, N-1} = \{(t_1, t_2) : t_1 \in [x_k, x_{k+1}], t_2 \in [x_{N-1}, x_N]\}, \quad k = \overline{0, N-2},$$

$$\Delta_{N-1, l} = \{(t_1, t_2) : t_1 \in [x_{N-1}, x_N], t_2 \in [x_l, x_{l+1}]\}, \quad l = \overline{0, N-2},$$

$$\Delta_{N-1, N-1} = [x_{N-1}, x_N; x_{N-1}, x_N], \quad x_k = \frac{ak}{N}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$, $k, l = \overline{0, N-1}$, определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl} \iint_{\Delta_{kl}} e^{i(v_{k_1} t_1 + v_{k_2} t_2)} dt_1 dt_2 \right| = A(v_{k_1}, v_{k_2}), \quad k_1, k_2 = \overline{0, N-1}, \quad (22)$$

где $v_k = -D + 2Dk/N$, $k = \overline{0, N}$. Величина параметра D подбирается из тех же соображений, что и в одномерном случае.

Системе (22) ставится в соответствие система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\alpha_{k_1 k_2}(u)}{du} = G_{k_1 k_2}(u) \times \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl}(u) \iint_{\Delta_{kl}} e^{i(v_{k_1} t_1 + v_{k_2} t_2)} dt_1 dt_2 \right] - A(v_{k_1}, v_{k_2}), \quad k_1, k_2 = \overline{0, N-1}, \quad (23)$$

где функции $|G_{k_1 k_2}(u)| \neq 0$ подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма производной Гаусса правой части системы (23) была отрицательной. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ решение системы (23) стремится к решению системы (22). В противном случае необходимо перейти к обобщениям непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений.

Система (23) решается методом Эйлера или Рунге – Кутты.

Предложенная вычислительная схема значительно упрощается, если восстанавливаемая функция периодическая.

Рассмотрим уравнение

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right| = A(\omega_1, \omega_2), \quad (24)$$

в котором функция $f(t_1, t_2)$ полагается периодической.

Замечание. Вопросы периодизации функций рассматриваются в монографиях [15, 16].

Рассматриваемый ниже метод имеет достаточно общий характер.

Аппроксимируем интеграл в левой части уравнения (24) одномерным интегралом. Для этого сделаем замену переменных $t_1 = q_1 t$, $t_2 = q_2 t$, где q_1, q_2 ($q_1 \neq q_2$) – простые числа, и перейдем к уравнению

$$\left| \int_0^{2\pi} f(q_1 t, q_2 t) e^{it(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2)} dt \right| = A(\omega_1, \omega_2). \quad (25)$$

Погрешности, возникающие при переходе от интеграла $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ к интегралу $\int_0^{2\pi} g(q_1 t, q_2 t) dt$ на различных классах функций, оценены в [17].

Приближенное решение уравнения (25) ищем в виде интерполяционного полинома

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \Psi_k(t), \quad (26)$$

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-t_k)}{\sin \frac{t-t_k}{2}}, \quad t_k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n},$$

с неизвестным вектором $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{2n})$.

Применяя метод коллокации к уравнению (25), имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} f_n(t) e^{it(\omega_1^l q_1 + \omega_2^l q_2)} dt \right| = A(\omega_1^l, \omega_2^l), \quad l = \overline{0, 2n}, \quad (27)$$

здесь ω_1^l, ω_2^l – целые числа.

Замечание. Интеграл в левой части системы уравнений (27) вычисляется аналитически, но также могут быть использованы квадратурные формулы. Ниже, при проведении вычислительных экспериментов, интегралы вычислялись по квадратурной формуле прямоугольников.

Для решения системы уравнений (27) используется непрерывный метод решения операторных уравнений

$$\frac{d\alpha_k(u)}{du} = \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j(u) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-t_j)}{\sin \frac{t-t_j}{2}} e^{it(\omega_1^l q_1 + \omega_2^l q_2)} dt \right| - A(\omega_1^l, \omega_2^l), \quad l = \overline{0, 2n}, \quad (28)$$

и, в случае необходимости, его модификации.

Для решения системы уравнений (28) ниже используется метод Эйлера:

$$\alpha_k(m+1) = \alpha_k(m) + h \left[\int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j(m) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-t_j)}{\sin \frac{t-t_j}{2}} \times \right. \\ \left. \times e^{it(\omega_1^l q_1 + \omega_2^l q_2)} dt - A(\omega_1^l, \omega_2^l) \right], \quad l = \overline{0, 2n}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (29)$$

При выполнении условий теоремы 1.1 итерационный процесс (29) сходится к решению $\alpha^* = (\alpha_0^*, \dots, \alpha_{2n}^*)$ системы уравнений (27).

Из построения вычислительной схемы (29) нетрудно заметить, что значение α^* интерпретируется как $f_n(q_1 t_l, q_2 t_l)$, $l = \overline{0, 2n}$, т.е. как значение $f_n(x_1^l, x_2^l)$, $x_1^l = q_1 t_l$, $x_2^l = q_2 t_l$, $l = \overline{0, 2n}$. По значениям $f_n(x_1^l, x_2^l)$, $l = \overline{0, 2n}$, функция $f_n(x_1, x_2)$ восстанавливается в области $[0, 2\pi]^2$.

Один из методов восстановления заключается в следующем. Положим $s = \lfloor \sqrt{2n+1} \rfloor$. Покроем квадрат $[0, 2\pi]^2$ более мелкими квадратами:

$$d_{kl} = \{x_1, x_2 : x_1 \in [v_k, v_{k+1}), x_2 \in [v_l, v_{l+1}), k, l = \overline{0, s-1}\}, \\ d_{s-1, l} = \{x_1, x_2 : x_1 \in [v_{s-1}, v_s], x_2 \in [v_l, v_{l+1}), l = \overline{0, s-1}\}, \\ d_{k, s-1} = \{x_1, x_2 : x_1 \in [v_k, v_{k+1}), x_2 \in [v_{s-1}, v_s], k = \overline{0, s-1}\}, \\ d_{s-1, s-1} = [v_{s-1}, v_s; v_{s-1}, v_s], \quad v_k = 2\pi k / s, \quad k = \overline{0, s}.$$

В случае, если в квадрате d_{kl} окажется одна точка из множества $(q_1 t_j, q_2 t_j)$, $j = \overline{0, s}$, скажем точка $(q_1 t_j^*, q_2 t_j^*)$, то полагаем $f_n(x_1, x_2) = f(q_1 t_j^*, q_2 t_j^*)$ при $(x_1, x_2) \in d_{kl}$.

Если в квадрате d_{kl} окажется несколько точек из множества $(q_1 t_j, q_2 t_j)$, $j = \overline{0, s}$, то в качестве значения $f_n(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in d_{kl}$, берется среднее значение $f(q_1 t_j, q_2 t_j)$ по точкам $(q_1 t_j, q_2 t_j)$, $j = \overline{0, s}$, попавшим в квадрат d_{kl} .

Если в квадрате d_{kl} нет точек множества $(q_1 t_j, q_2 t_j)$, $j = \overline{0, s}$, то в качестве значения $f_n(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in d_{kl}$, берется среднее значение $f(q_1 t_j, q_2 t_j)$ по точкам $(q_1 t_j, q_2 t_j)$, $j = \overline{0, s}$, попавшим в квадраты, смежные d_{kl} .

Описанным выше методом были решены следующие примеры.

Пример 1. Восстановить неизвестную функцию $f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in [0, 2\pi]^2$, по амплитуде $A(\omega_1, \omega_2) = |F(\omega_1, \omega_2)|$ ее спектра.

Здесь

$$|A(\omega_1, \omega_2)| = \left[\left(\frac{-\omega_2 (\cos(2\pi\omega_1) + \cos(2\pi\omega_2) - \cos(2\pi(\omega_1 + \omega_2))) - 1}{\pi\omega_1(\omega_1^2 - 4)(\omega_2^2 - 4)} \right)^2 + \left(\frac{-\omega_2 (\sin(2\pi\omega_1) + \sin(2\pi\omega_2) - \sin(2\pi(\omega_1 + \omega_2)))}{\pi\omega_1(\omega_1^2 - 4)(\omega_2^2 - 4)} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Точное значение восстанавливаемой функции $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1) \times \cos(2x_2)$.

Для восстановления функции $f(x_1, x_2)$ была использована вычислительная схема (29) при следующих значениях параметров: $q_1 = 5$, $q_2 = 11$, число узлов коллокации $N = 100$, шаг формулы Эйлера $h = 0,001$, число итераций $n = 1000$. Результаты восстановления представлены на рис. 1.

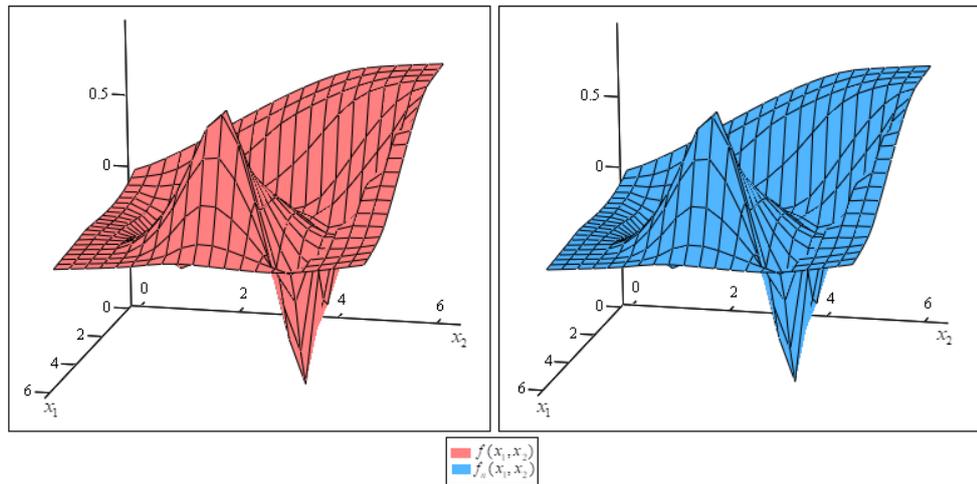


Рис. 1. Восстановление функции $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1) \cos(2x_2)$

Пример 2. Восстановить неизвестную функцию $f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in [0, 2\pi]^2$, по амплитуде $A(\omega_1, \omega_2) = |F(\omega_1, \omega_2)|$ ее спектра, заданной с погрешностью.

Точное значение восстанавливаемой функции $f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1} \cos x_2$.

Аналитически вычислить преобразование Фурье $F(\omega_1, \omega_2)$ не удалось, и поэтому функция $A(\omega_1, \omega_2)$ вычислялась приближенно по кубатурным формулам. Таким образом восстановление функции $f(x_1, x_2)$ происходило

с погрешностью в исходных данных. Величина погрешности в задании исходных данных равна вычислительной погрешности.

Для восстановления функции $f(x_1, x_2)$ была использована вычислительная схема (29) при следующих значениях параметров: $q_1 = 5$, $q_2 = 11$, число узлов коллокации $N = 100$, шаг формулы Эйлера $h = 0,001$, число итераций $n = 1000$. Результаты восстановления представлены на рис. 2.

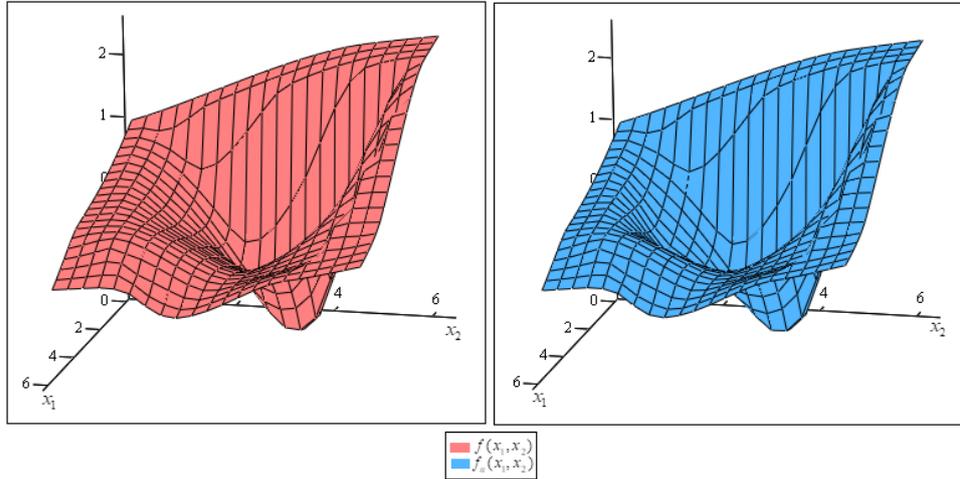


Рис. 2. Восстановление функции $f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1} \cos x_2$

3. Восстановление дискретных последовательностей

3.1. Одномерный случай

Имеется последовательность $f(x_k)$, $k = \overline{0, N}$ – исходное изображение, заданное набором значений $f(x_k)$ в точках x_k , $k = \overline{0, N}$. Информация об этой последовательности задается набором действительных чисел

$$\gamma_l = |F(z_l)| = \left| \sum_{k=0}^N f(x_k) z_l^{-k} \right|, \quad l = \overline{0, N}, \quad \text{где } F(z) \text{ – } Z\text{-преобразование последовательности}$$

последовательности $f(x_k)$, $F(z) = \sum_{k=0}^N f(x_k) z^{-k}$. Множество z_l , $l = \overline{0, N}$, – это точки

на плоскости комплексной переменной, в которых известны абсолютные значения Z -преобразования последовательности $f(x_k)$, $k = \overline{0, N}$. Требуется, располагая информацией о последовательности $\gamma_l = |F(z_l)|$, восстановить последовательность $f(x_k)$, $k = \overline{0, N}$.

Математическая задача ставится следующим образом. Необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\left| \sum_{k=0}^N \alpha_k z_l^{-k} \right| = \gamma_l, \quad \gamma_l = |F(z_l)|, \quad l = \overline{0, N}. \quad (30)$$

Замечание. Аналогичным образом решается задача в случаях, когда вместо Z -преобразования используется любое другое дискретное преобразование.

Замечание. Разрешимость системы уравнений (30) исследуется по аналогии с разрешимостью системы (11) в непрерывном случае.

Для решения этой задачи, по аналогии с непрерывным случаем, воспользуемся непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = g_l(u) \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k(u) z_l^{-k} \right] - \gamma_l, \quad l = \overline{0, N}, \quad (31)$$

где функции $|g_l(u)| \neq 0$ подбираются так, чтобы логарифмическая норма якобиана правой части системы уравнений (31) была отрицательной. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ решение системы (31) сходится к решению системы (30).

Система (31) решается методом Эйлера:

$$\alpha_l(n+1) = \alpha_l(n) + g_l(n) \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k(n) z_l^{-k} \right] - \gamma_l, \quad l = \overline{0, N},$$

где h – шаг метода Эйлера, $g_l(n) = \pm 1$ подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана вектора правой части (31) была отрицательной.

В случае, если такие константы $g_l(n)$ не удастся подобрать, необходимо перейти к модификациям непрерывного метода (см. теоремы 1.3, 1.4).

3.2. Двумерный случай

Пусть $f(n_1, n_2)$, $n_1, n_2 = \overline{0, N_i}$, $i = 1, 2$, – исходное изображение. Ниже для простоты обозначений полагаем $N_i = N$, $i = 1, 2$. Применяем к множеству значений $f(n_1, n_2)$ Z -преобразование $F(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N f(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}$.

Пусть в $(N+1)^2$ точках (ξ_i, η_j) , $i, j = \overline{0, N}$, известны значения $\gamma_{ij} = |F(\xi_i, \eta_j)|$, $i, j = \overline{0, N}$. Требуется восстановить последовательность $f(n_1, n_2)$ по значениям γ_{ij} , $i, j = \overline{0, N}$. Математическая задача сводится к решению системы уравнений

$$\left| \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N f(k_1, k_2) \xi_i^{-k_1} \eta_j^{-k_2} \right| = \gamma_{ij}, \quad i, j = \overline{0, N}. \quad (32)$$

Система уравнений (32) решается непрерывным методом

$$\frac{df_{ij}(u)}{du} = g_{ij}(u) \left[\sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N f_{k_1 k_2}(u) \xi_i^{-k_1} \eta_j^{-k_2} \right] - \gamma_{ij}, \quad i, j = \overline{0, N}, \quad (33)$$

где функции $|g_{ij}(u)| > 0$ подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия сходимости непрерывного метода (см. теоремы 1.1, 1.2).

В противном случае необходимо воспользоваться его обобщением (см. теоремы 1.3, 1.4).

Приведем модельный пример.

Пример 3. Рассмотрим восстановление дискретной последовательности, заданной функцией

$$f(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{4 - n_1 + n_2}{4}, & 0 \leq n_1 \leq 2, -2 \leq n_2 \leq 0, \\ \frac{4 - n_1 - n_2}{4}, & 0 \leq n_1 \leq 2, 0 \leq n_2 \leq 2, \\ \frac{4 + n_1 + n_2}{4}, & -2 \leq n_1 \leq 0, -2 \leq n_2 \leq 0, \\ \frac{4 + n_1 - n_2}{4}, & -2 \leq n_1 \leq 0, 0 \leq n_2 \leq 2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (34)$$

На рис. 3 представлены исходный $f(t_1, t_2)$ и восстановленный $f_n(t_1, t_2)$ сигналы. Для восстановления последовательности использована вычислительная схема (33), которая решалась методом Эйлера при следующих значениях параметров: $N = 100$, $h = 0,001$ – шаг метода Эйлера, $m = 1000$ – число итераций метода Эйлера.

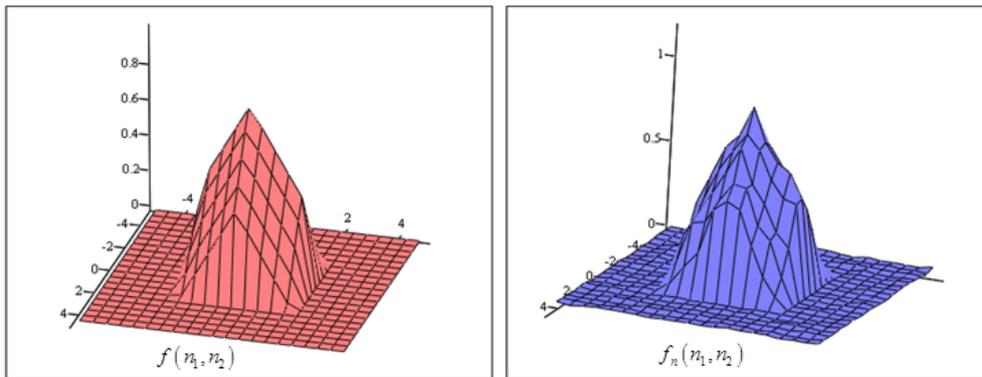


Рис. 3. Восстановление последовательности, заданной формулой (34)

На рис. 4 представлены передний, центральный, задний фронты исходной $f(t_1, t_2)$ и восстановленной $f_n(t_1, t_2)$ дискретной последовательности до осреднения, и на рис. 5 – после фильтрации и осреднения соответственно. Осреднение по пяти значениям проводится для сглаживания выбросов и уменьшения эффекта Гиббса.

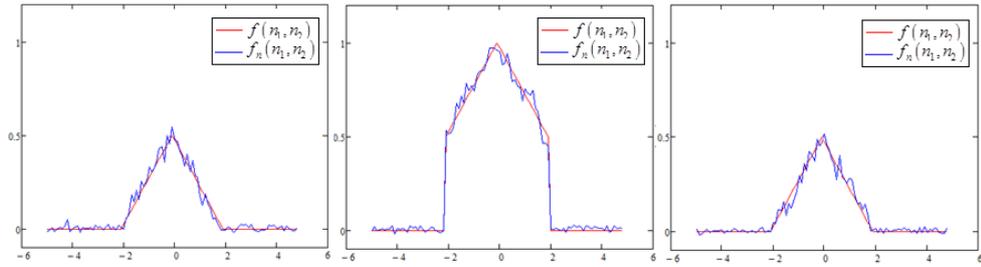


Рис. 4. Передний, центральный, задний фронты восстановленного сигнала (слева направо)

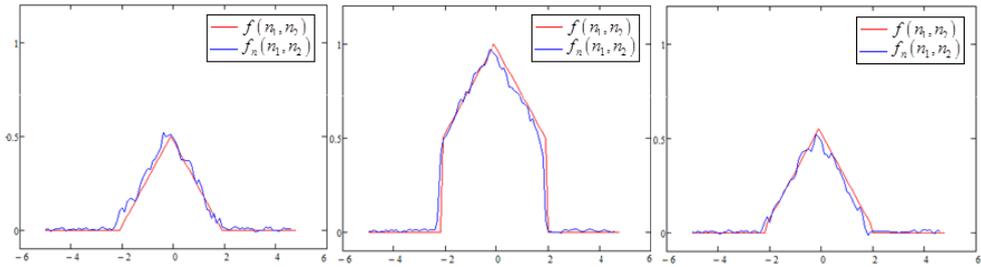


Рис. 5. Передний, центральный, задний фронты восстановленного сигнала после фильтрации и осреднения (слева направо)

4. Восстановление фазы спектра сигнала

Как было отмечено выше, восстановление фазы спектра сигнала состоит из двух этапов. На первом этапе восстанавливается исходный сигнал, на втором решается фазовая проблема.

Так как второй этап выполняется аналогично для всех рассмотренных выше случаев, ограничимся рассмотрением одномерного сигнала.

Пусть $x_n(t)$ – приближение к функции $f(t)$. Вычисляется преобразование Фурье $X_n(\omega)$ функции $x_n(t)$ и выделяются его действительная и мнимая части $X_n(\omega) = U_n(\omega) + iV_n(\omega)$. Фаза спектра сигнала $f(t)$ определяется формулой

$$\varphi_n(\omega) = \arctg \frac{V_n(\omega)}{U_n(\omega)}.$$

На рис. 6 представлены фазы спектра исходного сигнала $\varphi(\omega)$, заданного функцией

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 3], \\ 0, & t \in [-\infty, \infty] \setminus [0, 3] \end{cases} \quad (35)$$

и восстановленного $\varphi_n(\omega)$.

Заключение

В работе предложен двухступенчатый метод решения фазовой проблемы. На первом этапе восстанавливается функция (в непрерывном случае) или последовательность (в дискретном случае).

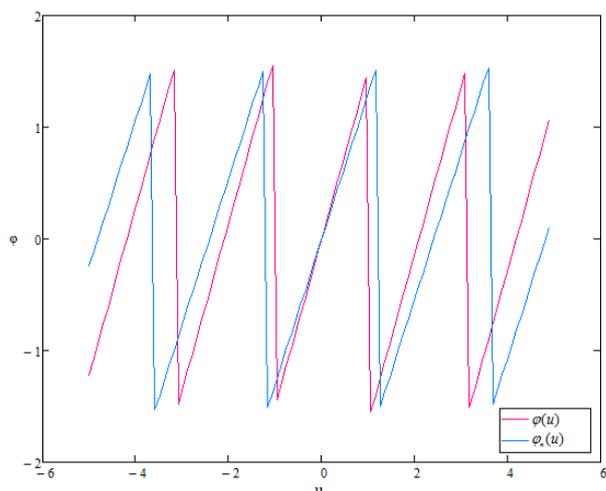


Рис. 6. Восстановление фазы спектра сигнала (35)

На втором этапе вычисляется преобразование Фурье восстановленной функции и вычисляется фаза спектра функции (непрерывной или дискретной). Предложенный метод может быть распространен на непрерывные и дискретные преобразования, отличные от преобразования Фурье и Z -преобразования.

Список литературы

1. Wolf E. Determination of phases of diffracted x-ray beams in investigations of structure of crystals // *Physics Letters A*. 2010. Vol. 374, № 3. P. 491–495. doi: 10.1016/j.physleta.2009.10.074
2. Wolf E. History and solution of the phase problem in the theory of structure determination of crystals from x-ray diffraction measurements – Chapter 7 // *Advances in Imaging and Electron Physics*. 2011. Vol. 165. P. 283–325. doi: 10.1016/B978-0-12-385861-0.00007-5
3. Потапов А. А., Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Пахомов А. А., Герман В. А. Новейшие методы обработки изображений / под ред. А. А. Потапова. М. : Физматлит, 2008. 496 с.
4. Boikov I., Zelina Y., Vasyunin D. Approximate Methods for Solving of Onedimensional Amplitude-phase Problem // *Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies MWENT 2020 – Proceedings*. Moscow, 2020. doi: 10.1109/MWENT47943.2020.9067415
5. Бойков И. В., Зелина Я. В. Приближённые методы решения амплитудно-фазовой проблемы для непрерывных сигналов // *Измерительная техника*. 2021. № 5. С. 37–46. doi: 10.32446/0368-1025it.2021-5-37-46
6. Boikov I. V., Zelina Y. V. Approximate Methods of Solving Amplitude-Phase Problems for Continuous Signals // *Measurement Techniques*. 2021. Vol. 64, № 5. P. 386–397. doi: 10.1007/s11018-021-01944-y
7. Boikov I. V., Zelina Ya. V., Vasyunin D. I. Approximate methods for solving amplitude-phase problem for discrete signals // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2099. P. 012002. doi: 10.1088/1742-6596/2099/1/012002
8. Сизиков В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab : учеб. пособие. СПб. : Лань, 2017. 412 с.
9. Сизиков В. С. Методы обработки результатов измерений : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Спец. Лит., 1999. 240 с.

10. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
11. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 534 с.
12. Soderlind G. The logarithmic norm. History and modern theory // BIT. Numerical mathematics. 2006. Vol. 46 (3). P. 631–652. doi: 10.1007/s10543-006-0069-9
13. Лозинский С. М. Замечание о статье В. С. Годлевского // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 457–459.
14. Гаурин М. К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов // Известия высших учебных заведений. Математика. 1958. № 5. 18–31.
15. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М. : Физматгиз, 1964. 222 с.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. М. : МЦНМО, 2004. 288 с.
17. Бойков И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза : Изд-во ПГУ, 2007. 236 с.

References

1. Wolf E. Determination of phases of diffracted x-ray beams in investigations of structure of crystals. *Physics Letters A*. 2010;374(3):491–495. doi: 10.1016/j.physleta.2009.10.074
2. Wolf E. History and solution of the phase problem in the theory of structure determination of crystals from X-ray diffraction measurements – Chapter 7. *Advances in Imaging and Electron Physics*. 2011;165:283–325. doi: 10.1016/B978-0-12-385861-0.00007-5
3. Potapov A.A., Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Pakhomov A.A., German V.A. *Noveyshie metody obrabotki izobrazheniy = Latest image processing techniques*. Moscow: Fizmatlit, 2008:496. (In Russ.)
4. Boikov I., Zelina Y., Vasyunin D. Approximate Methods for Solving of Onedimensional Amplitude-phase Problem. *Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies MWENT 2020 – Proceedings*. Moscow, 2020. doi: 10.1109/MWENT47943.2020.9067415
5. Boykov I.V., Zelina Ya.V. Approximate methods for solving the amplitude-phase problem for continuous signals. *Izmeritel'naya tekhnika = Measuring technology*. 2021;(5):37–46. (In Russ.). doi: 10.32446/0368-1025it.2021-5-37-46
6. Boikov I.V., Zelina Y.V. Approximate Methods of Solving Amplitude-Phase Problems for Continuous Signals. *Measurement Techniques*. 2021;64(5):386–397. doi: 10.1007/s11018-021-01944-y
7. Boikov I.V., Zelina Ya.V., Vasyunin D.I. Approximate methods for solving amplitude-phase problem for discrete signals. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;2099:012002. doi: 10.1088/1742-6596/2099/1/012002
8. Sizikov V.S. *Pryamye i obratnye zadachi vosstanovleniya izobrazheniy, spektroskopii i tomografii s MatLab: ucheb. posobie = Direct and inverse problems of image restoration, spectroscopy and tomography with MatLab: textbook*. Saint Petersburg: Izd-vo Lan', 2017:412. (In Russ.)
9. Sizikov V.S. *Metody obrabotki rezul'tatov izmereniy: ucheb. posobie = Methods for processing measurement results: textbook*. Saint Petersburg: Izd-vo Spets. Lit., 1999:240. (In Russ.)
10. Boykov I.V. On one continuous method for solving nonlinear operator equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2012;48(9):1308–1314. (In Russ.)
11. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve = Stability of solutions to differential equations in Banach space*. Moscow: Nauka, 1970:534. (In Russ.)

12. Soderlind G. The logarithmic norm. History and modern theory. *BIT. Numerical mathematics*. 2006;46(3):631–652. doi: 10.1007/s10543-006-0069-9
13. Lozinskiy S.M. A note about the article by V. S. Godlevsky. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 1973;13(2):457–459. (In Russ.)
14. Gavurin M.K. Nonlinear functional equations and continuous analogues of iterative methods. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 1958;(5):18–31. (In Russ.)
15. Korobov N.M. *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize = Number-theoretic methods in approximate analysis*. Moscow: Fizmatgiz, 1964:222. (In Russ.)
16. Korobov N.M. *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize. 2-e izd. = Number-theoretic methods in approximate analysis. The 2nd edition*. Moscow: MTsNMO, 2004:288. (In Russ.)
17. Boykov I.V. *Optimal'nye metody priblizheniya funktsiy i vychisleniya integralov = Optimal methods for approximating functions and calculating integrals*. Penza: Izd-vo PGU, 2007:236. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Илья Владимирович Бойков

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

Ilya V. Boykov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, professor of the sub-
department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Анастасия Александровна Пивкина

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

Anastasiya A. Pivkina

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: nastyashaldaeva@mail.ru

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 06.10.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

УДК 517.968, 517.983.37
doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-8

Метод интегральных уравнений в задаче распространения электромагнитной волны в пространстве, заполненном локально неоднородной средой, со слоем графена на границе области неоднородности

А. А. Цупак

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
altsupak@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – вывод гибридного интегро-дифференциального уравнения в случае неоднородного объемного препятствия электромагнитной волны, покрытого слоем графена. *Материалы и методы.* Для вывода уравнения используются тензор Грина и тензорный аналог интегральной формулы Грина. *Результаты.* Задача сопряжения для системы уравнений Максвелла сведена к гибриднему интегро-дифференциальному уравнению. *Выводы.* Получено новое уравнение, описывающее распространение монохроматической электромагнитной волны в локально неоднородной среде со слоем графена; для численного решения полученного уравнения предложен метод коллокаций.

Ключевые слова: распространение электромагнитной волны, слой графена, уравнения Максвелла, тензор Грина, формула Грина, гибридное интегро-дифференциальное уравнение, метод коллокаций

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20087).

Для цитирования: Цупак А. А. Метод интегральных уравнений в задаче распространения электромагнитной волны в пространстве, заполненном локально неоднородной средой, со слоем графена на границе области неоднородности // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 96–106. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-8

An integral equation method in the problem of electromagnetic wave propagation in a space filled with a locally inhomogeneous medium with a graphene layer at the boundary of the inhomogeneity region

A.A. Tsupak

Penza State University, Penza, Russia
altsupak@yandex.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the study is to obtain a hybrid integro-differential equation in the case of an inhomogeneous volumetric graphene-covered obstacle to an electromagnetic wave. *Material and methods.* The Green tensor and the tensor analogue of the Green integral formula are used to derive the equation. *Results.* The transmission problem for the Maxwell equations is reduced to a hybrid integro-differential equation. *Conclusions.* A new equation is obtained to describe the propagation of a monochromatic electromagnetic wave in the three-dimensional locally inhomogeneous space with a graphene layer; collocation method is proposed to solve the hybrid equation numerically.

© Цупак А. А., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Keywords: electromagnetic wave propagation, graphene layer, Maxwell's equations, Green's tensor, Green's formula, hybrid integro-differential equation, collocation method

Financing: the research was financed by the RSF within the research project No. 20-11-20087).

For citation: Tsupak A.A. An integral equation method in the problem of electromagnetic wave propagation in a space filled with a locally inhomogeneous medium with a graphene layer at the boundary of the inhomogeneity region. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):96–106. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-8

Введение

История исследования графена насчитывает не одно десятилетие. Началом таких исследований, пожалуй, можно считать наблюдения за структурой термически восстановленного оксида графита (GO) еще в середине XIX столетия [1]. Подробное описание и, что важнее, выделение графена в 2004 г. Андре Геймом и Константином Новоселовым вызвало волну интереса исследователей из разных областей науки к изучению графена и связанных с ним физических процессов. Спектр таких исследований чрезвычайно широк: от свойств графена на атомарном уровне до макроскопических явлений.

Возможность промышленным способом формировать тонкие слои графена привела к появлению структур с новыми электромагнитными свойствами. Как оказалось, некоторые связанные с такими структурами физические явления могут быть описаны в рамках классической электродинамической теории. В работах [1–3] рассмотрена задача о распространении электромагнитной волны в диэлектрическом слое, покрытом графеном.

Несомненный интерес представляет и задача о распространении электромагнитной волны в неограниченном трехмерном пространстве, заполненном неоднородной средой со слоем графена на границе области неоднородности. Скалярный аналог такой задачи рассматривался в работах [4, 5]. Методами теории потенциала задача сопряжения для уравнения Гельмгольца сводится к системе поверхностных уравнений [4] или к одному гибриднему уравнению [5].

В настоящей работе рассмотрен второй подход к исследованию задачи; для вывода интегрального уравнения применяется тензорный аналог формулы Грина. Как и в [5], полученное уравнение является гибридным: оператор уравнения представляет собой сумму интегро-дифференциальных операторов; в первом интеграл вычисляется по объему тела, а во втором – по его поверхности. Такое уравнение с точки зрения численного решения представляется более трудным, однако позволяет рассматривать задачи, в которых покрытое графеном препятствие электромагнитной волны является неоднородным (его диэлектрическая проницаемость является функцией пространственных координат).

1. Постановка задачи

Пусть пара вектор-функций $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)e^{-i\omega t}$ описывает монохроматическую электромагнитную волну с круговой частотой $\omega > 0$, распространяющуюся в трехмерном однородном изотропном пространстве \mathbb{R}^3 .

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 , заполненное локально неоднородной средой; ограниченная область неоднородности $Q \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂Q характеризуется диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x)$. Вне тела диэлектрическая проницаемость постоянна и равна ϵ_0 , причем на границе ∂Q области неоднородности диэлектрическая проницаемость может меняться скачкообразно. Всюду в \mathbb{R}^3 магнитная проницаемость постоянна и равна μ_0 . На поверхность ∂Q нанесен бесконечно тонкий слой графена.

Распространяющаяся в однородном пространстве электромагнитная волна является решением системы уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = -i\omega\epsilon_0\mathbf{E}_0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0\mathbf{H}_0. \quad (1)$$

В рассматриваемой задаче требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) =: (\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ в области неоднородности Q и $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) =: (\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e)$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$, удовлетворяющее:

– уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_i &= -i\omega\epsilon(x)\mathbf{E}_i, \quad \nabla \times \mathbf{E}_i = i\omega\mu_0\mathbf{H}_i, \quad x \in Q, \\ \nabla \times \mathbf{H}_e &= -i\omega\epsilon_0\mathbf{E}_e, \quad \nabla \times \mathbf{E}_e = i\omega\mu_0\mathbf{H}_e, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \end{aligned} \quad (2)$$

– условиям ограниченности энергии:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3), \quad (3)$$

– условиям излучения для рассеянного поля $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) := (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_0, \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= O(1/r), \quad \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{E}_s) + ik_0 r \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \rightarrow 0, \\ \mathbf{H}_s &= O(1/r), \quad \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{H}_s) + ik_0 r \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

– условиям сопряжения на ∂Q :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_i) = \sigma_g \mathbf{E}_\tau. \quad (5)$$

Поясним используемые обозначения: $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки трехмерного пространства, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{r}' = (y_1, y_2, y_3)$ – радиус-векторы с началом в нуле, $r = |\mathbf{r}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе области, направленный во внешность этой области, если не указано иное направление; $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – волновое число. Значение поля (например, \mathbf{E}) в точке обозначается через $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(x)$ или без указания аргумента.

Множитель σ_g в уравнении (5) определяет электрическую проводимость графена. Это может быть постоянный множитель или функция пространственных координат; σ_g может зависеть и от электрического поля (см. статью [3] и библиографию в ней). В данной работе вид σ_g не конкретизируется.

2. Тензор Грина

Пусть $G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (будем также использовать обозначения: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G(\mathbf{R})$).

Тензор Грина $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определяется [6] формулой

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\hat{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \otimes \nabla}{k_0^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (6)$$

где \otimes – тензорное произведение. Компоненты тензора Грина имеют вид

$$\hat{G}_{ij} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial^2}{k_0^2 \partial x_i \partial x_j} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad i, j, = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Тензор Грина удовлетворяет условиям симметричности

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{G}}^T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (8)$$

и является решением (в смысле распределений) уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) - k_0^2 \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R}). \quad (9)$$

Кроме того, для $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R})$ выполнены условия на бесконечности [7]:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = O(R^{-1}), \quad \mathbf{r} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R})) + ik_0 r \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = O(R^{-1}), \quad R = |\mathbf{R}| \rightarrow \infty. \quad (10)$$

3. Интегро-дифференциальное уравнение

Вывод уравнения основан на применении тензорного аналога второй формулы Грина:

$$\begin{aligned} & \int_Q dy \left[(\nabla \times \nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \right] = \\ & = \int_{\partial Q} ds_y \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \cdot \hat{\mathbf{A}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Замечание. Здесь и далее используются некоторые операции над векторами и тензорами. Например, нам понадобятся формулы

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{G}}^T = \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}. \quad (12)$$

Для удобства проверим эти равенства, разложив векторы и тензоры по ортонормированному базису (например, $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ и $\hat{\mathbf{G}} = G_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j =: G_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$) и опуская знак суммирования по повторяющемуся индексу. Итак, получим

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i \mathbf{e}_i \cdot b_j \mathbf{e}_j \times c_k \mathbf{e}_k = a_i b_j c_k \varepsilon_{ijk},$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = a_i b_j c_k \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) = a_i b_j c_k \varepsilon_{jik}.$$

Теперь первое равенство вытекает из свойства $\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$ символа Леви-Чевиты. Проверим второе соотношение:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{G}}^T &= a_k \mathbf{e}_k \cdot G_{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_k G_{ji} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = a_k G_{ji} \delta_{ki} \mathbf{e}_j = a_i G_{ji} \mathbf{e}_j, \\ \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a} &= G_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot a_k \mathbf{e}_k = a_k G_{ij} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = a_k G_{ij} \delta_{jk} \mathbf{e}_i = a_j G_{ij} \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

После переобозначения индексов в $a_j G_{ij} \mathbf{e}_i$ получим требуемое равенство.

Замечание. Так как тензор Грина $\hat{\mathbf{G}}$ является симметрическим, то второе равенство из (12) переписется в виде $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}$.

Вернемся к выводу интегро-дифференциального уравнения. Пусть точка наблюдения $x \in Q$. Применяя формулу (11) к $\mathbf{a} = \mathbf{E}$ и $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{G}}$, получим

$$\int_Q dy \left[(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}) \right] = \int_{\partial Q} ds_y \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right].$$

Из системы (2) следует $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(y) = \omega^2 \epsilon(y) \mu_0 \mathbf{E}(y) =: k^2(y) \mathbf{E}(y)$. Учитывая определение тензора Грина, выводим

$$\begin{aligned} \int_Q dy \left[(k^2(y) \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{E} \cdot (k_0^2 \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R})) \right] &= \int_{\partial Q} ds_y [\dots], \\ -\mathbf{E}(x) + \int_Q \left[(k^2(y) - k_0^2) \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{G}} \right] dy &= \int_{\partial Q} ds_y [\dots]. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем вектор $\mathbf{J} := (k^2(y) - k_0^2) \mathbf{E}$ и преобразуем интеграл в левой части (13), учитывая симметричность тензора $\nabla \otimes \nabla$ и единичного тензора $\hat{\mathbf{I}}$:

$$\begin{aligned} \int_Q \mathbf{J}(y) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) dy &= \int_Q \mathbf{J}(y) \cdot \left(\hat{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \otimes \nabla}{k_0^2} \right) G(\mathbf{R}) dy = \\ &= \int_Q \mathbf{J}(y) G(\mathbf{R}) dy + \frac{1}{k_0^2} \int_Q \mathbf{J}(y) \cdot (\nabla \otimes \nabla) G(\mathbf{R}) dy = \\ &= \int_Q \mathbf{J}(y) G(\mathbf{R}) dy + \frac{\text{grad div}}{k_0^2} \int_Q \mathbf{J}(y) G(\mathbf{R}) dy =: \mathbf{A} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем равенство

$$-\mathbf{E}(x) + \mathbf{A} \mathbf{E}(x) = \int_{\partial Q} ds_y \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_i)] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right], \quad x \in Q. \quad (14)$$

Здесь индекс i означает, что след вектор-функции $\mathbf{E}(y)$ на поверхности ∂Q берется из области Q .

Пусть шар B с центром в начале координат достаточно большого радиуса содержит область неоднородности Q . Применяя тензорную формулу Грина, получим еще одно равенство при $x \in Q$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{B \setminus \bar{Q}} dy \left[\mathbf{E}_e \cdot (k_0^2 \hat{\mathbf{G}} - \nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}) \right] = \int_{B \setminus \bar{Q}} dy \left[k_0^2 \mathbf{E}_e \cdot \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{E}_e \cdot (\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}) \right] = \\
 &= \int_{B \setminus \bar{Q}} dy \left[(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_e) \cdot \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{E}_e \cdot (\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}) \right] = \int_{\partial Q} ds_y \left[(-\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + \right. \\
 &\quad \left. + [-\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_e)] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right] + \int_{\partial B} ds_y \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_e)] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Здесь индекс e означает, что след вектор-функции $\mathbf{E}(y)$ на поверхности ∂Q берется извне области Q . При этом в интеграле по ∂Q записан вектор нормали \mathbf{n} , направленный во *внешность* области ∂Q , отсюда знак «минус».

Сложим равенства (14) и (15) и рассмотрим сначала случай, когда на поверхности тела *нет графена*:

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbf{E}(x) &= \int_{\partial B} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_e)] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right] ds_y + \\
 &+ \int_{\partial Q} ds_y \left[(\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e)) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e))] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Из непрерывности касательных компонент электрического и магнитного полей на ∂Q следует равенство нулю второго поверхностного интеграла.

Из условий излучения выведем:

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_s) = \frac{1}{r} \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{E}_s) = \frac{1}{r} (-ik_0 r \mathbf{E}_s + o(1)) = -ik_0 \mathbf{E}_s + o(r^{-1}), r \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) &= -\mathbf{E}_s \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{G}})) = -\mathbf{E}_s \cdot \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{G}})) = \\
 &= -\mathbf{E}_s \cdot \frac{1}{r} (-ik_0 r \hat{\mathbf{G}} + O(r^{-1})) = ik_0 \mathbf{E}_s \cdot \hat{\mathbf{G}} + \mathbf{E}_s \cdot O(r^{-1}). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Теперь преобразуем интеграл по ∂B , полагая $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B} [\dots] ds_y &= \int_{\partial B} ds_y \left[(\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s)) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) + [\mathbf{n} \times (\nabla \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s))] \cdot \hat{\mathbf{G}} \right] = \\
 &= \int_{\partial B} ds_y \left[\mathbf{E}_s \cdot O(r^{-2}) + \hat{\mathbf{G}} \cdot o(r^{-1}) \right] + \int_B dy \left[(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0) \cdot \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{E}_0 \cdot (\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}) \right] = \\
 &= o(1) + \int_B dy \left[k_0^2 \mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{E}_0 \cdot (\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{G}}) \right] = o(1) - \mathbf{E}_0(x), \quad r \rightarrow \infty. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Итак, переходя в (16) и (19) к пределу при $r \rightarrow \infty$, выводим интегро-дифференциальное уравнение по области неоднородности:

$$\mathbf{E}(x) - \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \frac{1}{k_0^2} \text{grad div} \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q,$$

или, вспоминая определение \mathbf{J} ,

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (20)$$

Аналогично получается и представление электрического поля вне \bar{Q} .

Теперь рассмотрим случай, когда на поверхность тела Q нанесен слой графена. Вывод уравнения может быть повторен; изменения касаются лишь второго интеграла в правой части (16) согласно граничным условиям (5). Из непрерывности касательных компонент электрического поля, как и ранее, получаем

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e)) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{G}}) ds_y = 0.$$

Преобразуем вторую часть интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q} [\mathbf{n} \times (\nabla \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e))] \cdot \hat{\mathbf{G}} ds_y = -i\omega\mu_0 \int_{\partial Q} [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e)] \cdot \hat{\mathbf{G}} ds_y = \\ & = -i\omega\mu_0 \int_{\partial Q} \sigma_g \mathbf{E}_\tau \cdot \hat{\mathbf{G}} ds_y = -i\omega\mu_0 \left(I + \frac{\text{grad div}}{k_0^2} \right) \int_{\partial Q} \sigma_g(y) \mathbf{E}_\tau(y) G(x, y) ds_y = \\ & = \frac{-i}{\omega\varepsilon_0} (k_0^2 + \text{grad div}) \int_{\partial Q} \sigma_g(y) \mathbf{E}_\tau(y) G(x, y) ds_y. \end{aligned}$$

Окончательно получим гибридное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \frac{i}{\omega\varepsilon_0} (k_0^2 + \text{grad div}) \int_{\partial Q} \sigma_g(y) \mathbf{E}_\tau(y) G(x, y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (21) \end{aligned}$$

Представление поля вне области неоднородности имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - \frac{i}{\omega\varepsilon_0} (k_0^2 + \text{grad div}) \int_{\partial Q} \sigma_g(y) \mathbf{E}_\tau(y) G(x, y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (22) \end{aligned}$$

4. О численном методе решения интегро-дифференциального уравнения

Для численного решения выведенного гибридного уравнения можно применить, например, метод коллокаций.

Пусть область неоднородности Q содержится в некотором параллелепипеде Π ; выполним разбиение (например, равномерное) Π на параллелепипеды Π_i . В качестве носителей финитных базисных функций определим такие множества $\pi_i = \Pi_i \cap Q$, что

$$\mu(\pi_i) > \nu_0, \quad (23)$$

где параметр ν_0 – минимально допустимый объем носителей базисных функций – определяется вычислителем (некоторые из подобластей, которые могут не удовлетворять условию (23), выделены на рис. 1 светло-серым цветом). Перенумеруем носители π_i , удовлетворяющие условию (23), так, чтобы индекс $i \in \{1, \dots, n_0\}$.

Определим простейшие кусочно-постоянные векторные функции:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^{(1)}(x) = (\chi_{\pi_i}(x), 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{\varphi}_i^{(2)}(x) = (0, \chi_{\pi_i}(x), 0)^T, \quad \boldsymbol{\varphi}_i^{(3)}(x) = (0, 0, \chi_{\pi_i}(x))^T,$$

то есть получим $n = 3n_0$ базисных функций, которые обозначим через $\boldsymbol{\varphi}_i(x)$.

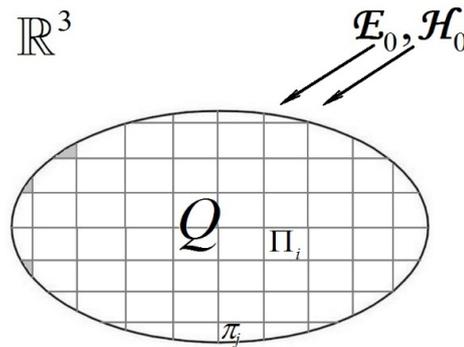


Рис. 1. Геометрия задачи: носители базисных функций в области неоднородности

Приближенное решение уравнения (21) ищется в виде линейной комбинации базисных функций:

$$\mathbf{E}_{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{\varphi}_i(x),$$

а неизвестные коэффициенты находятся согласно методу коллокаций из системы уравнений

$$\left((I + A_Q + A_{\partial Q}) \mathbf{E}_{(n)} \right) (\xi_k) = \mathbf{E}_0(\xi_k), \quad (24)$$

здесь I – единичный оператор; A_Q , $A_{\partial Q}$ – интегро-дифференциальные операторы уравнения (21) по области Q и поверхности ∂Q соответственно; ξ_k – узлы коллокации, принадлежащие носителям π_k .

5. Исследование задачи о собственных волнах методом интегральных уравнений

Рассмотрим задачу о собственных волнах, распространяющихся в неограниченном локально неоднородном пространстве, в которой требуется найти нетривиальные решения однородной системы уравнений Максвелла с условиями (3)–(5) (при $\mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 \equiv 0$), а спектральным параметром является круговая частота ω (этот параметр в общем случае можно считать комплексным). Исследование этой задачи сводится к решению однородного ($\mathbf{E}_0 \equiv 0$) интегро-дифференциального уравнения

$$(I + A_Q + A_{\partial Q})\mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Заметим, что если проводимость σ_g не зависит от значений электрического поля, то гибридное уравнение (21) является линейным, а (24) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. В частности, при $\sigma_g = 0$ из (21) получим интегро-дифференциальное уравнение задачи дифракции на неоднородном теле [8, 9], а из (23) – соответствующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения приближенного решения. В случае $\sigma_g = 0$ уравнение (25) имеет лишь тривиальные решения.

Для поиска нетривиальных решений линейной задачи о собственных волнах выполним ее дискретизацию, используя метод коллокаций и перехода от интегрального уравнения (25) к однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$[\mathbf{A}(\omega)]\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Определив параметр ω , при котором $\det[\mathbf{A}(\omega)] = 0$, найдем ненулевой столбец коэффициентов \mathbf{c} и, следовательно, нетривиальное приближенное решение \mathbf{E}_n задачи о собственных волнах.

Заключение

Выведено гибридное интегро-дифференциальное уравнение в задаче распространения монохроматической электромагнитной волны в локально неоднородной среде с бесконечно тонким слоем графена с проводимостью σ_g произвольного вида. Изложенный метод позволяет рассматривать неоднородные включения, диэлектрическая проницаемость которых является функцией пространственных координат, а также применять полученное уравнение к исследованию задачи в случае, когда проводимость σ_g зависит от электрического поля.

Список литературы

1. Geim A. K. Graphene prehistory // *Physica Scripta*. 2012. P. 014003. doi: 10.1088/0031-8949/2012/T146/014003
2. Смирнов Ю. Г., Тихов С. В., Гусарова Е. В. О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2022. № 3. С. 11–18. doi: 10.21685/2072-3040-2022-3-2

3. Smirnov Y., Tikhov S. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene // *Photonics*. 2023. Vol. 10. P. 523. doi: 10.3390/photronics10050523
4. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца // *Дифференциальные уравнения*. 2023. Т. 59, № 8. С. 1089–1097.
5. Цупак А. А. О разрешимости скалярной задачи дифракции монохроматической волны на неоднородном теле со специальными условиями сопряжения // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2023. № 4. С. 38–48.
6. Mishchenko M. I. *Electromagnetic Scattering by Particles and Particle Groups: An Introduction*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2014.
7. Van Bladel J. G. *Electromagnetic Fields*. 2nd ed. Hoboken, NJ : Wiley, 2007.
8. Самохин А. Б. *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии*. М. : Радио и Связь, 1998. 160 с.
9. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. *Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел*. М. : КноРус, 2016.

References

1. Geim A.K. Graphene prehistory. *Physica Scripta*. 2012:014003. doi: 10.1088/0031-8949/2012/T146/014003
2. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V., Gusarova E.V. On the propagation of electromagnetic waves in a dielectric layer coated with graphene. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022;(3):11–18. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2022-3-2
3. Smirnov Y., Tikhov S. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene. *Photonics*. 2023;10:523. doi: 10.3390/photronics10050523
4. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. On the Fredholm property and solvability of a system of integral equations in the conjugation problem for the Helmholtz equation. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2023;59(8):1089–1097. (In Russ.)
5. Tsupak A.A. On the solvability of the scalar problem of diffraction of a monochromatic wave on an inhomogeneous body with special coupling conditions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(4):38–48. (In Russ.)
6. Mishchenko M.I. *Electromagnetic Scattering by Particles and Particle Groups: An Introduction*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014.
7. Van Bladel J.G. *Electromagnetic Fields*. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2007.
8. Samokhin A.B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii = Integral equations and iterative methods in electromagnetic scattering*. Moscow: Radio i Svyaz', 1998:160. (In Russ.)
9. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel = Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and inhomogeneous bodies*. Moscow: KnoRus, 2016. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Алексей Александрович Цупак

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Aleksey A. Tsupak

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 05.12.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 16.01.2024

Принята к публикации / Accepted 08.02.2024

УДК 517.9

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-9

Метод микроволновой томографии для решения обратной задачи на телах цилиндрической формы

А. О. Лапич¹, М. Ю. Медведик²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lapich.a@yandex.ru, ²_medv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – решение обратной задачи дифракции на телах цилиндрической формы, расположенных в свободном пространстве. Применение рассматриваемой задачи может быть актуально при диагностике рака молочной железы. *Материалы и методы.* Исходную краевую задачу для уравнения Гельмгольца предлагается свести к решению интегрального уравнения. Данное уравнение будет решаться численным методом. Используется двухшаговый алгоритм для решения обратной задачи. *Результаты.* Представлены графические изображения, иллюстрирующие значения диэлектрической проницаемости внутри тела для исходной задачи и восстановленных значений. *Выводы.* Предложен и реализован численный метод нахождения волновой функции, позволяющей идентифицировать структуру объекта без нарушения его целостности.

Ключевые слова: интегральное уравнение Липпмана – Швингера, краевая задача для уравнения Гельмгольца, численный метод, обратная задача, двухшаговый метод, объединенные расчетные сетки, метод Галеркина

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания на проведение научно-исследовательской работы, регистрационный номер 124020200015-7.

Для цитирования: Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод микроволновой томографии для решения обратной задачи на телах цилиндрической формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 107–117. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-9

The microwave tomography method for solving the inverse problem on cylindrical bodies

A.O. Lapich¹, M.Yu. Medvedik²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹lapich.a@yandex.ru, ²_medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The main purpose of this study is finding of solution the inverse problem of diffraction. The application of this problem may be relevant in the diagnosis of breast cancer. *Materials and methods.* The initial boundary value problem for the Helmholtz equation is reduced to integral equation. This equation is solved numerically. A two-step algorithm is used to solve the inverse problem. *Results.* The graphic images which illustrate the value of the dielectric constant inside the body for the initial problem and for reconstructed one are presented. *Conclusions.* A numerical method for finding the wave function is proposed and implemented, which makes it possible to identify the structure of an object without damaging or destroying them.

Keywords: Lippmann-Schwinger integral equation, boundary value problem for the Helmholtz equation, numerical method, inverse problem, two-step method, combined computational grids, Galerkin method

Financing: the work was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment for research, registration number 124020200015-7.

For citation: Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The microwave tomography method for solving the inverse problem on cylindrical bodies. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):107–117. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-9

Введение

В последнее время все более актуальным становится изучение методов неразрушающего контроля для определения параметров внутри объектов различной формы. Это связано с развитием науки и техники, а также с тем, что неразрушающие методы контроля позволяют определить параметры объектов без повреждения или разрушения их структуры, что особенно важно для сохранения целостности и функциональности многих объектов и тел.

В работе изучается обратная задача дифракции на цилиндрических диэлектрических телах. В таких задачах требуется определить форму и характеристики объекта внутри него на основе данных о распределении интенсивности отраженной или рассеянной волны от стороннего источника излучения. Решение этой задачи имеет важное практическое значение во многих областях, включая медицину, геофизику, томографию, радиолокацию и другие области, где требуется восстановление скрытых или недостающих данных на основе доступной информации или измерений. Имеются многочисленные публикации авторов, занимающихся подобными исследованиями [1–6].

Методы решения обратной задачи дифракции включают численные алгоритмы и модельные эксперименты, которые позволяют получить информацию о структуре объекта и оптимизировать процесс идентификации.

Задача решается как для однородного, так и для неоднородного случая. С высокой степенью детализации определяется функция неоднородности цилиндрического тела.

Задача может решаться на различных частотах в широком диапазоне радиочастотного спектра, включающем длинные волны (ДВ) с частотами 30–300 кГц, средние волны (СВ) с частотами 300–3000 кГц, короткие волны (КВ) с частотами 3–30 МГц, а также ультракороткие волны.

Исследуемая задача также может найти свое применение в медицинских измерениях. Отсюда следует необходимость указать факт негативного влияния высоких частот на человеческий организм. СанПиН [7] устанавливают предельно допустимые уровни (ПДУ) воздействия на людей электромагнитных излучений в диапазоне частот 30 кГц – 300 ГГц и указывают, что максимальная продолжительность воздействия электромагнитного излучения напрямую зависит от частоты данного излучения. Увеличение частоты неизбежно ведет к уменьшению времени нахождения человека около источника.

Кроме частоты излучения, эффект электромагнитного излучения на объект зависит от интенсивности, продолжительности, характера и режима облучения, комбинированного действия других факторов и свойств тканей.

Наибольшее влияние на организм оказывает диапазон сверхвысоких частот (СВЧ), затем ультравысоких частот (УВЧ), а менее активными являются высокие частоты (ВЧ). Биологическая активность обычно возрастает с уменьшением длины волны.

Интенсивность электромагнитного поля различна в разных диапазонах: при сверхнизких, низких, средних, высоких, очень высоких частотах интенсивность излучения определяется напряженностью электрического и магнитного полей. В диапазонах УВЧ, СВЧ и КВЧ мы находимся в волновой зоне, где воздействие оценивается плотностью потока энергии (ППЭ).

При данной диагностике требуется, чтобы объект находился на близком расстоянии к устройству. Соответственно нужно либо уменьшить длительность влияния излучения (что в некоторых случаях не представляется возможным), либо уменьшить излучаемые частоты от прибора анализа. В работе предлагается уменьшение значения частоты, которое не будет ухудшать точность вычисления.

Для достижения данной цели необходимо разработать алгоритм численного решения нелинейного интегрального уравнения. В процессе работы используются методы численного интегрирования, аппроксимации функций и решения систем линейных алгебраических уравнений. Также требуется провести анализ полученных результатов и сравнить их с экспериментальными данными или с решениями других моделей. Важно учитывать физические особенности задачи, такие как граничные условия, свойства материала тела и характеристики электромагнитных волн. Данный метод имеет ряд преимуществ и является перспективным подходом при решении подобных задач [8–11].

Решение реальных физических задач требует все больших объемов вычислений, которые зачастую невозможно провести на персональном компьютере. Это заставляет исследователей использовать суперкомпьютерные технологии для получения результатов и приводит к необходимости создания новых методов решения задач. Используя субиерархический подход [12–15], можно избежать повторных вычислений для решения задачи на телах, описываемых геометрией уже рассчитанной фигуры.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции на теле Q , расположенном в свободном пространстве R^3 . Пусть дано неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем; $k^2(x)$ – непрерывная функция.

Будем предполагать, что на границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

а также необходимо учесть условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = iku + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\Delta u + k_0^2 u = (k_0^2 - k^2(x))u + f(x). \quad (4)$$

На рис. 1 представлено тело Q , k_0 является волновым числом вне тела, $k(x)$ – функция, характеризующая волновое число внутри тела; E – поле, исходящее от точечного источника и его направление. Данная задача сводится к интегральному уравнению вида

$$u(x) = f^0(x) + k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy, \quad (5)$$

или

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (6)$$

здесь уравнение (5) описывает однородный случай $k(x) = \text{const}$, а уравнение (6) – неоднородный случай и содержит волновую функцию $k(x)$.

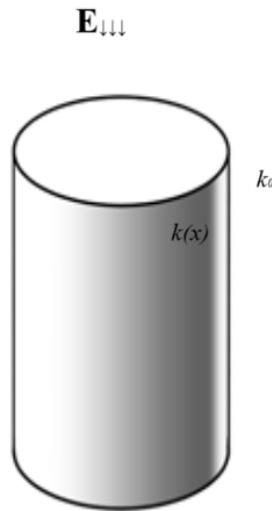


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи

2. Численный метод

Обозначим $Au := \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy$, $u := u(x)$, $F := f^0(x)$ и

запишем данное уравнение в операторном виде:

$$Lu := u - Au := F.$$

Решение уравнений (5)–(6) производится методом Галеркина. Рассмотрим n -мерное пространство V_n . Проведем аппроксимацию элементов ψ элементами $\psi_n \in V_n$ и найдем ψ_n из системы уравнений

$$(L\psi_n, v) = (f, v). \quad (7)$$

Эти уравнения определяют конечномерный оператор $L_n : V_n \rightarrow V'_n$, где V'_n есть антидуальное пространство к V_n . В качестве базисных функций выберем функции v_k .

В общем случае можно ожидать сходимость метода только тогда, когда подпространства V_n предельно плотны в V :

$$\inf_{\psi \in V_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

для всех $\varphi \in V$. Эту оценку также называют свойством аппроксимации. Введем равномерную расчетную сетку. Для удобства работы с объемным телом введем трехиндексную нумерацию элементов сетки Π_{klm} . Базисные функции v_{klm} , $i = 1, 2, 3$, определяются следующим образом:

$$v_{klm} = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в пространстве L_2 .

В терминах операторов сходимость проекционного метода означает, что для всех $n \geq N$ конечномерные операторы $A_n := P_n A : V_n \rightarrow V'_n$ являются обратимыми и что поточечная сходимость $A_n^{-1} P_n A \varphi \rightarrow \varphi, n \rightarrow \infty$, имеет место при всех $\varphi \in V$.

Поскольку $A_n := P_n A$ – оператор, действующий в конечномерных пространствах, применение проекционного метода сводится к решению конечномерной системы линейных алгебраических уравнений. Для заполнения матрицы преобразуем трехиндексный вектор в одноиндексный, аналогичную процедуру произведем и с матрицей. Правая часть матричного уравнения задается формулой $f_j = \int_{\Pi_j} f v_j dy$. Каждый элемент матрицы получается путем

вычисления шестикратного интеграла, имеющего слабую особенность в области интегрирования

$$L_{ij} = w \delta_{ij} - \int_{\Pi_j} \int_{\Pi_i} G(x, y) \phi_i(x) \cdot v_j(y) dx dy,$$

где $\phi_i(x)$ и $v_j(y)$ – тестовые и базисные функции соответственно.

Процедура избавления от особенности представляет собой разнесение точек интегрирования. Интегрирование производится по двум элементарным параллелепипедам Π_{klm} .

Далее мы приступаем к процедуре обнаружения неоднородностей внутри объекта. Для этой цели мы применяем двухшаговый алгоритм [8–11]. Определим значение тока $\mathbf{J}(x)$ через поле:

$$\mathbf{J}(x) = [k_0^2 - k^2(x)]u(x).$$

Далее решаем уравнение относительно тока $\mathbf{J}(x)$:

$$u_m(x_{ob}) = k_0^2 \int_Q G_E(x_{ob}, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x_{ob} \notin Q, \quad (8)$$

где $u_m(x_{ob})$ является моделируемым полем в точках x_{ob} .

Из уравнения (8) находим $\mathbf{J}(x)$ и определяем волновую функцию тела $k(x)$ в каждой ячейке, используя формулу пересчета:

$$(k_0^2 - k^2(x)) = \frac{\mathbf{J}(x)}{u^0(x) + \left(\int_Q G_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right)}, \quad x \in Q. \quad (9)$$

В связи с тем, что уравнение (8) является уравнением первого рода, полученная в ходе вычисления матрица является плохо обусловленной. Поэтому будем использовать объединенные расчетные сетки для эффективной реализации вычислительного процесса и снижения числа обусловленностей матрицы [12].

3. Численные результаты

Поскольку все рассматриваемые тела будут иметь цилиндрическую форму, удобно производить вычисления в цилиндрической системе координат, которая позволяет описывать трехмерное пространство с помощью радиуса, азимутального угла и высоты (или расстояния от начала координат). Это удобно для описания объектов с цилиндрической симметрией, таких как цилиндры, конусы и т.д. Кроме того, цилиндрическая система координат позволяет упростить некоторые математические вычисления и уравнения в определенных задачах.

Будем считать, что объемное тело Q является цилиндром:

$$Q = \{x : 0 \leq \rho < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, c_1 < z < c_2\},$$

где положение точки задается радиусом ρ , углом φ и координатой z . Процесс перехода к декартовым координатам записывается следующей системой:

$$x = \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi; \\ x_2 = \rho \sin \varphi; \\ x_3 = z. \end{cases}$$

Далее разобьем тело Q на блоки Π_{klm} , представленные на рис. 2 справа, следующим образом:

$$\Pi_{klm} = \{x : \rho_k < \rho < \rho_{k+1}, \varphi_l < \varphi < \varphi_{l+1}, z_m < z < z_{m+1}\},$$

$$\rho_k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{n} k, \quad \varphi_l = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n} l, \quad z_m = \frac{z_2 - z_1}{n} m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, n-1$.

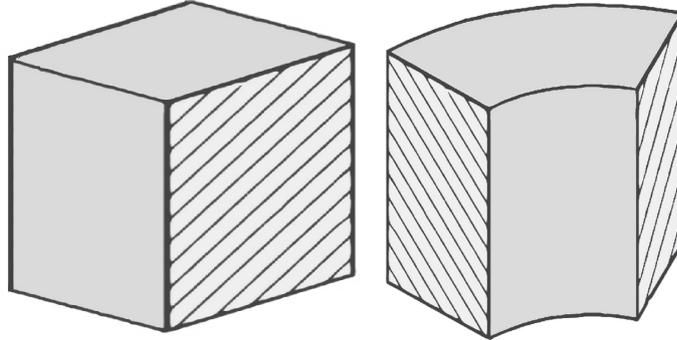


Рис. 2. Элементарная ячейка сетки для декартовой и цилиндрической систем координат

Расстояние в цилиндрической системе координат определяется по формуле

$$|x - y| = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 - 2\rho_x\rho_y \cos(\varphi_x - \varphi_y) + (z_x - z_y)^2}.$$

Приведем результаты расчета для нескольких фигур цилиндрической формы. Для наглядности приведем результаты в виде рис. 3–5. Внутри тела цилиндрической формы был введен объект вида «кольцо» с равномерно распределенной неоднородной структурой в диапазоне от 80 до 240 единиц. Размер расчетной сетки составлял $15 \times 15 \times 15$ ячеек, и была выбрана с учетом технической возможности вычисляющего персонального компьютера. Источником поля является волна, исходящая от точечного источника с частотой 1,3 ГГц.

Как можно наблюдать, результаты исходной и восстановленной задач на рис. 3, 4 имеют схожие значения. Отсюда следует, что метод решения обратной задачи работает и показывает приемлемые результаты.

В качестве эксперимента для проверки метода при значениях «с шумом» была введена погрешность 5 и 15 %, которая показана на рис. 5, 6. Видны некоторые изменения в значениях неоднородности, однако форма объекта отчетливо просматривается в каждом результате. При больших значениях шума требуется использование дополнительных методов фильтрации данных.

Заключение

Описанный выше метод позволяет моделировать рассеяние волны на телах различной формы (в данной работе цилиндрической) и тем самым позволяет описывать процесс восстановления волновой функции объектов на

вычислительных сетках. Объекты могут иметь внутри как линейную, так и нелинейную структуру.

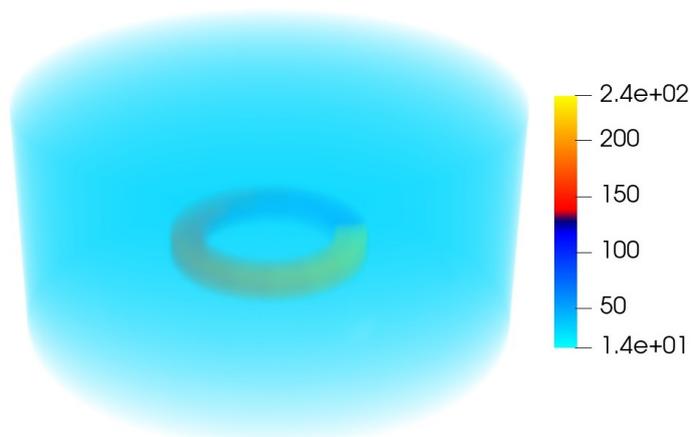


Рис. 3. Значение исходной волновой функции

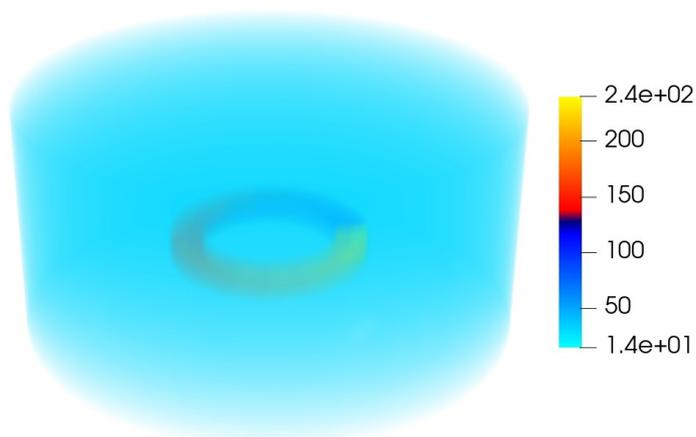


Рис. 4. Значение восстановленной волновой функции

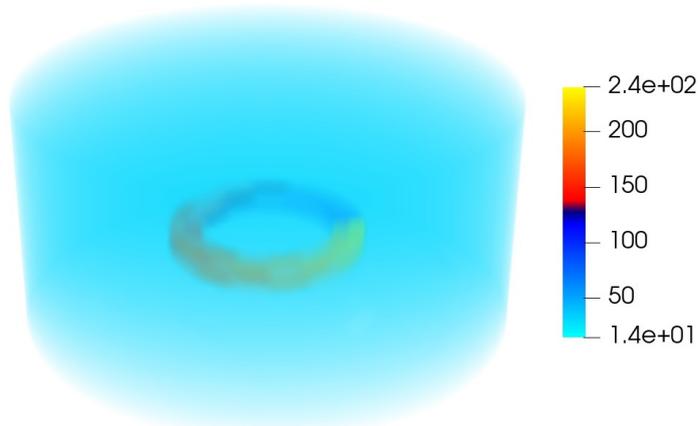


Рис. 5. Значение восстановленной волновой функции с внесенной погрешностью 5 % на этапе моделирования поля

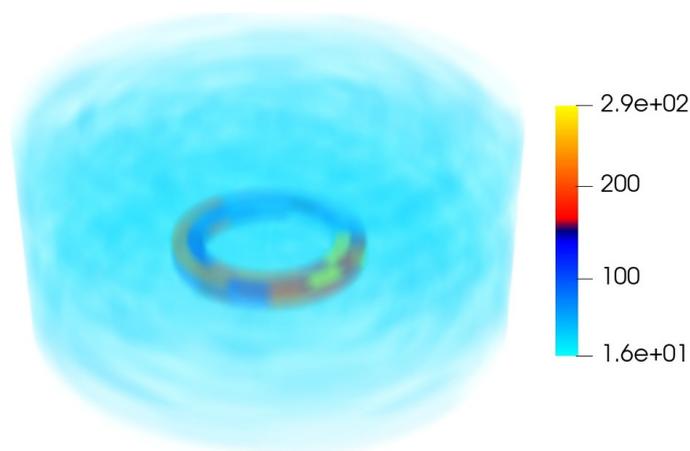


Рис. 6. Значение восстановленной волновой функции с внесенной погрешностью 15 % на этапе моделирования поля

Использование объединенных расчетных сеток позволяет эффективно решать задачу на низких частотах, допустимых в [7].

Список литературы

1. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М. : Научн. мир, 2005. 296 с.
2. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Сибирское научное изд-во, 2009. 457 с.
3. Горюнов А. Л., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М. : Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
4. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акустический журнал. 2008. Т. 54, № 3. С. 469–482.
5. Буров В. А., Вечерин С. Н., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 516–536.
6. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи акустического рассеяния Ч. 2. М. : УРСС, 2019. 760 с.
7. СанПиН 2.2.4/2.1.8.055-96. Санитарные правила и нормы. Электромагнитные излучения радиочастотного диапазона (ЭМИ РЧ): утвержден Постановлением Государственного комитета санитарно-эпидемиологического надзора Российской Федерации от 8 мая 1996 г. № 9. 1996. 20 с.
8. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2023. № 4. С. 142–153.
9. Smirnov Y. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28. P. 1474–1492.
10. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory. М. : RU-SCIENCE, 2018. 212 p.
11. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Итерационная схема решения нелинейного интегрального уравнения типа Липпмана – Швингера методом Галеркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 66–73.

12. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 165, № 2. С. 166–176.
13. Медведик М. Ю. Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 4. С. 82–88.
14. Медведик М. Ю. Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера на телах сложной формы // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 2. С. 175–180.
15. Медведик М. Ю. Решение интегральных уравнений субиерархическим методом на обобщенных расчетных сетках // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 4. С. 81–96.

References

1. Romanov V.G. *Ustoychivost' v obratnykh zadachakh = Stability in inverse problems*. Moscow: Nauchn. mir, 2005:296. (In Russ.)
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi = Inverse and ill-posed problems*. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009:457.
3. Goryunov A.L., Saskovets A.V. *Obratnye zadachi rasseyaniya v akustike = Inverse scattering problems in acoustics*. Moscow: Izd-vo MGU, 1989:152. (In Russ.)
4. Alekseenko N.V., Burov V.A., Rumyantseva O.D. Solution of the three-dimensional inverse problem of acoustic scattering. Modified Novikov algorithm. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic magazine*. 2008;54(3):469–482. (In Russ.)
5. Burov V.A., Vecherin S.N., Morozov S.A., Rumyantseva O.D. Modeling the exact solution of the inverse problem of acoustic scattering using functional methods. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic magazine*. 2010;56(4):516–536. (In Russ.)
6. Burov V.A., Rumyantseva O.D. *Obratnye volnovye zadachi akusticheskoy tomografii: Obratnye zadachi akusticheskogo rasseyaniya Ch. 2 = Inverse wave problems of acoustic tomography: Inverse problems of acoustic scattering. Part 2*. Moscow: URSS, 2019:760. (In Russ.)
7. SanPiN 2.2.4/2.1.8.055-96. *Sanitary rules and regulations. Electromagnetic radiation in the radio frequency range*: approved by the Resolution of the State Committee for Sanitary and Epidemiological Surveillance of the Russian Federation from May 8, 1996 No.. 1996:20. (In Russ.)
8. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Method for restoring parameters of body inhomogeneities based on the results of electromagnetic field measurements. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2023;(4):142–153. (In Russ.)
9. Smirnov Y.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28:1474–1492.
10. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. *Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory*. Moscow: RU-SCIENCE, 2018:212.
11. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. An iterative scheme for solving Lippmann-Schwinger nonlinear integral equation by the Galerkin method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):66–73. (In Russ.)
12. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Solution of a scalar two-dimensional nonlinear problem of diffraction by objects of arbitrary shape. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences*. 2023;165(bk.2):166–176. (In Russ.)

13. Medvedik M.Yu. The subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2010;(4):82–88. (In Russ.)
14. Medvedik M.Yu. The subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shape. *Radiotekhnika i elektronika = Radio engineering and electronics.* 2012;57(2):175–180. (In Russ.)
15. Medvedik M.Yu. Solving integral equations using the subhierarchical method on generalized computational grids. *Matematicheskoe modelirovanie = Math modeling.* 2015;27(4):81–96. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Андрей Олегович Лапич

ассистент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: lapich.a@yandex.ru

Andrey O. Lapich

Assistant of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 11.11.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 27.12.2023

Принята к публикации / Accepted 13.02.2024

УДК 517.958

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-10

Дифференциальные изоморфизмы первого порядка канонических гиперболических уравнений

А. И. Фомин¹, В. И. Титаренко²

¹Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), Москва, Россия

²Государственный университет управления, Москва, Россия

¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Для определения неизвестных решений канонических гиперболических дифференциальных уравнений для функций двух переменных представлялось актуальным установление связи дифференциальных изоморфизмов первого порядка этих уравнений с преобразованиями Лапласа. *Материалы и методы.* Для исследования изоморфизмов первого порядка применяется теорема о представлении изоморфизмов линейными дифференциальными трансляторами. Используются прямые действия с дифференциальными операторами. *Результаты и выводы.* Доказана теорема о том, что любой дифференциальный изоморфизм первого порядка между каноническими дифференциальными уравнениями с вещественно-аналитическими коэффициентами является композицией преобразований Лапласа первого и нулевого порядка. Это позволяет расширить область применения классических преобразований Лапласа.

Ключевые слова: каноническое уравнение, дифференциальный транслятор, преобразование Лапласа, порядок дифференциального гомоморфизма и изоморфизма, би-транслятор

Для цитирования: Фомин А. И., Титаренко В. И. Дифференциальные изоморфизмы первого порядка канонических гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 118–125. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-10

The first-order differential isomorphisms of canonical hyperbolic equations

A.I. Fomin¹, V.I. Titarenko²

¹Russian State University named after A.N. Kosygin (Technology. Design. Art), Moscow, Russia

²State University of Management, Moscow, Russia

¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Abstract. *Background.* To determine unknown solutions of canonical hyperbolic differential equations for functions of two variables, it seemed relevant to establish the connection of the first-order differential isomorphisms of these equations with Laplace transformations. *Materials and methods.* To study the first-order isomorphisms, the theorem on the representation of isomorphisms by linear differential translators is applied. Direct actions with differential operators are used. *Results and conclusions.* The theorem is proved that any first-order differential isomorphism between canonical differential equations with real analytic

coefficients is a composition of the first-order and zero-order Laplace transformations. This makes it possible to expand the scope of application of classical Laplace transformations.

Keywords: canonical equation; differential translator; Laplace transform; order of differential homomorphism and isomorphism; bittranslator

For citation: Fomin A.I., Titarenko V.I. The first-order differential isomorphisms of canonical hyperbolic equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):118–125. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-10

Введение

Многие задачи механики и математической физики приводятся к линейным однородным гиперболическим дифференциальным уравнениям второго порядка для функций двух переменных. В канонических координатах уравнения такого типа принимают вид [1]:

$$v_{xy} + a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v = (\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0. \quad (1)$$

Частным случаем уравнений (1) являются уравнения Эйлера – Пуассона [1, 2].

Будем считать функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $\lambda(x, y)$ в общем случае комплекснозначными, бесконечно дифференцируемыми в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Функции λ , $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$ (h и k – инварианты Лапласа уравнения (1)) ни в одной точке этой области не обращаются в нуль. Предложенные Лапласом в работе [3] дифференциальные замены зависимых переменных

$$L_\lambda : v \rightarrow u = \lambda v, \quad L_1 : v \rightarrow u_1 = (\partial_y + a)v, \quad L_{-1} : v \rightarrow u_{-1} = (\partial_x + b)v \quad (2)$$

порождают преобразования, которые переводят уравнение (1) в новые канонические уравнения [4]:

$$P_\lambda u = u_{xy} + a_\lambda u_x + b_\lambda u_y + c_\lambda u = 0, \quad \tilde{P}_1 u_1 = (u_1)_{xy} + \tilde{a}_1 (u_1)_x + \tilde{b}_1 (u_1)_y + \tilde{c}_1 u_1 = 0, \\ \tilde{P}_{-1} u_{-1} = (u_{-1})_{xy} + \tilde{a}_{-1} (u_{-1})_x + \tilde{b}_{-1} (u_{-1})_y + \tilde{c}_{-1} u_{-1} = 0. \quad (3)$$

Преобразования Лапласа устанавливают взаимно однозначные соответствия между решениями исходного уравнения и решениями преобразованных уравнений [1]. Кроме того, замены (2) индуцируют преобразования линейных дифференциальных операторов. В результате возникают равенства [4]:

$$P_\lambda \cdot \lambda = \lambda \cdot P, \quad \tilde{P}_1 \cdot (\partial_y + a) = (\partial_y + \tilde{a}_1) \cdot P, \quad \tilde{P}_{-1} \cdot (\partial_x + b) = (\partial_x + \tilde{b}_{-1}) \cdot P. \quad (4)$$

С точки зрения общей теории [5] равенства (4) означают, что операторы λ , $(\partial_y + a)$, $(\partial_x + b)$ являются линейными дифференциальными трансляторами соответствующих типов. Трансляторы реализуют дифференциальные гомоморфизмы линейных однородных систем дифференциальных уравнений. И для понимания смысла теоремы, которая будет доказана, необходимо здесь привести простейшие сведения из теории дифференциальных гомоморфизмов [5]. Краткое изложение основных понятий этой теории есть в статьях

[5, 6], в которых вводились понятия битранслятора и порядка дифференциального гомоморфизма и изоморфизма.

Материалы и методы

В работе используются обозначения статьи [5]: D – алгебра скалярных линейных дифференциальных операторов (л.д.о.) конечного порядка с бесконечно дифференцируемыми в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ или вещественно аналитическими комплекснозначными коэффициентами; $D(r, m)$ – множество матричных л.д.о. $P = \left\| P_{ij} \right\|$ размера $r \times m$ с элементами $P_{ij} \in D$; $D^m(P)$ – подмодуль свободного левого D -модуля $D^m \approx D(1, m)$ с образующими $P_i = (P_{i1}, \dots, P_{im})$; \mathfrak{M}_P – фактормодуль $D^m / D^m(P)$; $\sigma: D^m \rightarrow \mathfrak{M}_P$ – естественный эпиморфизм; V – левый унитарный D -модуль, $u = (u_1, \dots, u_m) \in V^m$; л.д.о. P задает линейное отображение $P: V^m \rightarrow V^r$ по правилу: $P_i u = P_{i1}u_1 + \dots + P_{im}u_m$, $Pu = (P_1u, \dots, P_ru)$. Пусть $\ker P = V_P^m$ – подпространство решений системы $Pu = 0$ в D -модуле V^m , $P_1 \in D(r_1, m_1)$, $P_2 \in D(r_2, m_2)$.

Л.д.о. $a_1 \in D(m_1, m_2)$ называется **линейным дифференциальным транслятором** типа (P_1, P_2) , если для некоторого $b_2 \in D(r_1, r_2)$ выполняется равенство $P_1 a_1 = b_2 P_2$. Л.д.о. b_2 называется **битранслятором**. Транслятор a_1 задает линейное отображение $l_{a_1}: V_{P_2}^{m_2} \rightarrow V_{P_1}^{m_1}$, и возникает линейное отображение l линейного пространства $T(P_1, P_2)$ трансляторов типа (P_1, P_2) в пространство $\text{hom}_{\mathbb{C}}(V_{P_2}^{m_2}, V_{P_1}^{m_1})$. Это отображение не инъективно, точнее, ядро этого отображения задается равенством $\ker l = \{a \in D(m_1, m_2): D^{m_1} a \subseteq D^{m_2}(P_2)\}$. От неоднозначности можно избавиться, если заменить трансляторы гомоморфизмами фактормодулей. Дело в том, что равенство $P_1 a_1 = b_2 P_2$ эквивалентно включению $D^{m_1}(P_1) a_1 \subseteq D^{m_2}(P_2)$. Поэтому транслятор типа (P_1, P_2) задает D -гомоморфизм фактормодулей $\psi_{a_1}^1: \mathfrak{M}_{P_1} \rightarrow \mathfrak{M}_{P_2}$ и отображение $\psi^1: a \rightarrow \psi_a^1$ является эпиморфизмом линейного пространства $T(P_1, P_2)$ на линейное пространство $\text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, \mathfrak{M}_{P_2})$ [5].

Связь элементов $\text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, \mathfrak{M}_{P_2})$ с решениями систем уравнений $P_1 u = 0, P_2 v = 0$ устанавливается согласно работе [5]. Любой гомоморфизм ξ модуля \mathfrak{M}_P в модуль V можно задать с помощью элемента $u \in V_P^m$ по правилу $\xi = \phi_u(\sigma(\beta)) = \beta u$, $\beta \in D^m$. Отображение $\phi: V_P^m \rightarrow \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V)$,

$u \rightarrow \phi_u$, при этом оказывается изоморфизмом линейных пространств. Гомоморфизм $\gamma \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, \mathfrak{M}_{P_2})$ порождает стандартное линейное отображение $\gamma^* : \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_2}, V) \rightarrow \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, V)$, $\xi \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_2}, V) \rightarrow \gamma^*(\xi) = \xi\gamma$. Если v – решение системы $P_2v = 0$, ϕ_v^2 – соответствующий гомоморфизм $\mathfrak{M}_{P_2} \rightarrow V$, то $\gamma^*(\phi_v^2) = \phi_v^2\gamma$ – гомоморфизм $\mathfrak{M}_{P_1} \rightarrow V$, которому соответствует решение $u = (\phi^1)^{-1}(\phi_v^2\gamma)$ системы $P_1u = 0$ [5]. Отображение l_{a_1} связано с гомоморфизмом ψ_{a_1} естественным образом, точнее, верно равенство: $\phi_{a_1v}^1 = (\phi_v^2 \cdot \psi_{a_1})$ [5].

Теперь естественными представляются следующие определения, понятия и утверждения. Элемент $\gamma \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, \mathfrak{M}_{P_2})$ называется **дифференциальным гомоморфизмом** типа (P_1, P_2) . Однородные системы линейных дифференциальных уравнений $P_1u = 0$, $P_2v = 0$ называются **дифференциально изоморфными**, если $\mathfrak{M}_{P_1} \approx \mathfrak{M}_{P_2}$. **Порядком** $\text{ord } \gamma$ **дифференциального гомоморфизма** $\gamma \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, \mathfrak{M}_{P_2})$ называется наименьший из порядков дифференциальных трансляторов типа (P_1, P_2) , реализующих гомоморфизм γ . Изоморфизм $\gamma : \mathfrak{M}_{P_1} \rightarrow \mathfrak{M}_{P_2}$ имеет порядок (v_1, v_2) , если $\text{ord } \gamma = v_1$, $\text{ord } \gamma^{-1} = v_2$ и изоморфизм γ имеет порядок v , если $\text{ord } \gamma = \text{ord } \gamma^{-1} = v$.

Гомоморфизм $\gamma \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_{P_1}, \mathfrak{M}_{P_2})$, $\gamma = \psi_{a_1}^1$, является **изоморфизмом** тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\gamma^{-1} = \psi_{a_2}^2$ такой, что верны равенства: $\gamma^{-1}\gamma = \psi_{a_2}^2 \psi_{a_1}^1 = \psi_{a_1a_2}^1 = \text{id}_1$, $\gamma\gamma^{-1} = \psi_{a_1}^1 \psi_{a_2}^2 = \psi_{a_2a_1}^2 = \text{id}_2$, где id_1 , id_2 – тождественные отображения $\mathfrak{M}_{P_1} \rightarrow \mathfrak{M}_{P_1}$ и $\mathfrak{M}_{P_2} \rightarrow \mathfrak{M}_{P_2}$ соответственно. Следовательно, системы $P_1u = 0$, $P_2v = 0$ дифференциально изоморфны тогда и только тогда, когда существуют линейные дифференциальные трансляторы $a_1 \in T(P_1, P_2)$, $a_2 \in T(P_2, P_1)$ такие, что выполняются равенства: $a_1a_2 = e^{m_1} + \lambda_1P_1$, $a_2a_1 = e^{m_2} + \lambda_2P_2$, $\lambda_1 \in D(m_1, r_1)$, $\lambda_2 \in D(m_2, r_2)$, а e^{m_1} , e^{m_2} – единичные матрицы соответствующих порядков [5].

Результаты и выводы

Возвращаясь к каноническим уравнениям, будем считать, что:

$$P_1 = \partial_{xy} + a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_1, \quad P_2 = \partial_{xy} + a_2\partial_x + b_2\partial_y + c_2, \quad h_1 = ((a_1)_x + a_1b_1 - c_1),$$

$$k_1 = (b_1)_y + a_1b_1 - c_1, \quad h_2 = ((a_2)_x + a_2b_2 - c_2), \quad k_2 = (b_2)_y + a_2b_2 - c_2.$$

Предположим дополнительно, что коэффициенты л.д.о. P_1, P_2 являются вещественно аналитическими функциями. Такая функция либо тождественно равна нулю, либо отлична от нуля на плотном в области Ω множестве. Докажем следующую теорему.

Теорема о дифференциальных изоморфизмах первого порядка канонических дифференциальных уравнений. Любой дифференциальный изоморфизм первого порядка между каноническими дифференциальными уравнениями вида (1) с вещественно аналитическими коэффициентами является композицией преобразований Лапласа первого и нулевого порядка.

Доказательство. Предположим, что канонические уравнения $P_1u = 0$, $P_2v = 0$ связаны дифференциальным изоморфизмом первого порядка. Тогда должны существовать л.д.о. $\tilde{a}_1 = X_1\partial_x + Y_1\partial_y + Z_1$, $\tilde{a}_2 = X_2\partial_x + Y_2\partial_y + Z_2$ и функции $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ такие, что выполняются равенства:

$$\tilde{a}_1\tilde{a}_2 = 1 + \lambda_1 P_1, \quad \tilde{a}_2\tilde{a}_1 = 1 + \lambda_2 P_2. \quad (5)$$

$$\text{Выражение } \sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

называется главным символом скалярного л.д.о. $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ порядка k .

То есть $\sigma_{P_1}(x, \xi) = \sigma_{P_2}(x, \xi) = \xi_1 \xi_2$, $\sigma_{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}(x, \xi) = \lambda_1 \xi_1 \xi_2$, $\sigma_{\tilde{a}_2 \tilde{a}_1}(x, \xi) = \lambda_2 \xi_1 \xi_2$, $\sigma_{\tilde{a}_1}(x, \xi) = X_1 \xi_1 + Y_1 \xi_2$, $\sigma_{\tilde{a}_2}(x, \xi) = X_2 \xi_1 + Y_2 \xi_2$. При умножении скалярных л.д.о. главные символы перемножаются, поэтому должны выполняться равенства: $(X_1 \xi_1 + Y_1 \xi_2)(X_2 \xi_1 + Y_2 \xi_2) = \lambda_1 \xi_1 \xi_2 = \lambda_2 \xi_1 \xi_2$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $X_1 X_2 = 0$, $Y_1 Y_2 = 0$, $X_1 Y_2 + Y_1 X_2 = \lambda$. Функции X_1, Y_1 не могут одновременно обращаться в нуль, функции X_2, Y_2 тоже не могут одновременно обращаться в нуль. Поэтому возможны только два типа л.д.о. первого порядка, реализующих взаимно обратные дифференциальные изоморфизмы: $\tilde{a}_1 = X_1 \partial_x + Z_1$, $\tilde{a}_2 = Y_2 \partial_y + Z_2$ или $\tilde{a}_1 = Y_1 \partial_y + Z_1$, $\tilde{a}_2 = X_2 \partial_x + Z_2$.

Для определенности рассмотрим первый случай:

$$(X_1 \partial_x + Z_1)(Y_2 \partial_y + Z_2) = X_1 Y_2 \partial_{xy} + X_1 Z_2 \partial_x + (X_1 (Y_2)_x + Z_1 Y_2) \partial_y + \\ + (X_1 (Z_2)_x + Z_1 Z_2) = 1 + \lambda (\partial_{xy} + a_1 \partial_x + b_1 \partial_y + c_1),$$

$$(Y_2 \partial_y + Z_2)(X_1 \partial_x + Z_1) = Y_2 X_1 \partial_{xy} + (Y_2 (X_1)_y + Z_2 X_1) \partial_x + Y_2 Z_1 \partial_y + \\ + (Y_2 (Z_1)_y + Z_2 Z_1) = 1 + \lambda (\partial_{xy} + a_2 \partial_x + b_2 \partial_y + c_2).$$

Приравнивая коэффициенты при производных, получим: $X_1 Y_2 = \lambda$, $X_1 Z_2 = \lambda a_1$, $X_1 (Y_2)_x + Z_1 Y_2 = \lambda b_1$, $X_1 (Z_2)_x + Z_1 Z_2 = 1 + \lambda c_1$; $Y_2 Z_1 = \lambda b_2$, $Y_2 (X_1)_y + Z_2 X_1 = \lambda a_2$, $Y_2 (Z_1)_y + Z_2 Z_1 = 1 + \lambda c_2$.

Подставим $\lambda = X_1 Y_2$ в равенства $X_1 Z_2 = \lambda a_1$, $Y_2 Z_1 = \lambda b_2$. Получим равенства: $Z_2 = Y_2 a_1$, $Z_1 = X_1 b_2$. Заменив Z_1, Z_2 в равенствах $a_1 = X_1 \partial_x + Z_1$ и

$a_2 = Y_2 \partial_y + Z_2$, получим $\tilde{a}_1 = X_1(\partial_x + b_2)$, $\tilde{a}_2 = Y_2(\partial_y + a_1)$. Подставим $\lambda = X_1 Y_2$, $Z_1 = X_1 b_2$, $Z_2 = Y_2 a_1$ в равенства $X_1(Y_2)_x + Z_1 Y_2 = \lambda b_1$ и $X_1(Z_2)_x + Z_1 Z_2 = 1 + \lambda c_1$. Получим: $(Y_2)_x + b_2 Y_2 = b_1 Y_2$, $X_1(Y_2)_x a_1 + X_1 Y_2 (a_1)_x + X_1 a_1 b_2 Y_2 = 1 + X_1 Y_2 c_1$. Подставим выражение $b_2 Y_2 = b_1 Y_2 - (Y_2)_x$ в последнее равенство, получим:

$$X_1(Y_2)_x a_1 + X_1 Y_2 (a_1)_x + X_1 a_1 (b_1 Y_2 - (Y_2)_x) = X_1 Y_2 (a_1)_x + X_1 Y_2 a_1 b_1 = 1 + X_1 Y_2 c_1,$$

$$X_1 Y_2 ((a_1)_x + a_1 b_1 - c_1) = 1, \quad X_1 Y_2 h_1 = 1.$$

Аналогично, подставим $\lambda = X_1 Y_2$, $Z_2 = Y_2 a_1$, $Z_1 = X_1 b_2$ в равенства $Y_2(X_1)_y + Z_2 X_1 = \lambda a_2$ и $Y_2(Z_1)_y + Z_2 Z_1 = 1 + \lambda c_2$. Получим: $(X_1)_y + a_1 X_1 = a_2 X_1$, $Y_2(X_1)_y b_2 + Y_2 X_1 (b_2)_y + Y_2 b_2 a_1 X_1 = 1 + X_1 Y_2 c_2$. Подставим $a_1 X_1 = a_2 X_1 - (X_1)_y$ в последнее равенство. Найдем:

$$Y_2(X_1)_y b_2 + Y_2 X_1 (b_2)_y + Y_2 b_2 (a_2 X_1 - (X_1)_y) = 1 + X_1 Y_2 c_1,$$

$$Y_2 X_1 (b_2)_y + Y_2 X_1 a_2 b_2 = 1 + X_1 Y_2 c_2, \quad Y_2 X_1 ((b_2)_y + a_2 b_2 - c_2) = 1, \quad X_1 Y_2 k_2 = 1.$$

Из равенств $X Y_1 h_1 = 1$, $X Y_1 k_2 = 1$ следует, что функции X_1 , Y_2 , k_2 , h_1 и $\lambda = X_1 Y_2$ не обращаются в нуль ни в какой точке области Ω и выполняется равенство $h_1 = k_2$. Умножим обе части равенства $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = 1 + \lambda P_1$ справа на л.д.о. \tilde{a}_1 . Получим равенство $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1 + \lambda P_1 \tilde{a}_1$. Умножив обе части равенства $\tilde{a}_2 \tilde{a}_1 = 1 + \lambda P_2$ слева на \tilde{a}_1 , получим равенство $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_1 \lambda P_2$. Сравнив полученные равенства, найдем, что верны равенства: $\tilde{a}_1 \lambda P_2 = \lambda P_1 \tilde{a}_1$, $P_1 \tilde{a}_1 = (1/\lambda)(\tilde{a}_1 \lambda) P_2$. Последнее равенство означает, что л.д.о. \tilde{a}_1 является линейным дифференциальным транслятором типа (P_1, P_2) , т.е. $\tilde{a}_1 \in T(P_1, P_2)$. Аналогично показывается, что л.д.о. \tilde{a}_2 является линейным дифференциальным транслятором типа (P_2, P_1) , т.е. $\tilde{a}_2 \in T(P_2, P_1)$. При этом операторы $\tilde{a}_1 = X_1(\partial_x + b_2)$, $\tilde{a}_2 = Y_2(\partial_y + a_1)$ являются произведениями операторов умножения на функции X_1 , Y_2 , которые не обращаются в нуль ни в какой точке области Ω , на л.д.о. первого порядка $(\partial_x + b_2)$ и $(\partial_y + a_1)$ соответственно.

Будем теперь считать, что $X_1 = 1$, л.д.о. \tilde{a}_1 примет вид $\tilde{a}_1 = (\partial_x + b_2)$. Совместим обозначения формул (3) и (4) с обозначениями, принятыми при доказательстве теоремы об изоморфизмах: $\tilde{P}_{-1} \rightarrow P_1$, $P \rightarrow P_2$, $b \rightarrow b_2$, $\tilde{b}_{-1} \rightarrow b_1$. Теперь очевидно, что транслятор $\tilde{a}_1 = (\partial_x + b_2) \in T(P_1, P_2)$ прямо связан с заменой переменной $L_{-1}: v \rightarrow u_{-1} = (\partial_x + b)v$ в формулах (2). Такая замена индуцирует преобразование Лапласа первого порядка. Умножение на нулевую функцию X_1 порождает преобразование Лапласа нулевого порядка. Поэтому в общем случае дифференциальный изоморфизм первого порядка, порожденный транслятором $\tilde{a}_1 = X_1(\partial_x + b_2)$, действительно является произведением преобразований Лапласа нулевого и первого порядка. Таким же об-

разом рассматривается случай транслятора $\tilde{a}_2 = Y_2(\partial_y + a_1)$. Наконец, аналогично рассматривается второй случай: пара операторов $\tilde{a}_1 = Y_1\partial_y + Z_1$, $\tilde{a}_2 = X_2\partial_x + Z_2$. Теорема доказана.

Заключение

Связь дифференциальных изоморфизмов первого порядка гиперболических дифференциальных уравнений 2-го порядка для функций двух переменных с преобразованиями Лапласа установлена, о чем свидетельствует доказательство теоремы. Если уравнения связаны дифференциальным изоморфизмом первого порядка, то можно одно из уравнений преобразовать с помощью простой замены зависимой переменной. В результате получатся уравнения, связанные классическим преобразованием Лапласа первого порядка, и это позволяет проще решать задачи механики, описываемые каноническими дифференциальными уравнениями.

Список литературы

1. Аксенов А. В. Линейные дифференциальные соотношения между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 12. С. 3–37.
2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям с частными производными. М. : Изд-во иностранной литературы, 1957.
3. Laplace P. S. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles // Memoires de l'Academie royale des Sciences de Paris. 1773/77. P. 341–402. [Перепечатано: Oeuvres completes. Paris : Gauthier–Villars, 1893. Vol. 9. P. 5–68].
4. Фомин А. И., Титаренко В. И. Система определяющих уравнений для линейных дифференциальных трансляторов первого порядка семейства канонических гиперболических уравнений // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XL Междунар. науч.-практ. конф. Вып. 4 (32). М. : Интернаука, 2016. С. 15–27.
5. Фомин А. И. Преобразования Лапласа как дифференциальные изоморфизмы // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XLIV–XLVIII Междунар. науч.-практ. конф. Вып. 8-12 (35). М. : Интернаука, 2016. С. 5–12.
6. Fomin A. I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations // Russian Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 19, № 2. P. 159–181.

References

1. Aksenov A.V. Linear differential relations between solutions of the class of Euler–Poisson–Darboux equations. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya = Modern mathematics and its applications*. 2004;12:3–37. (In Russ.)
2. Tricomi F. *Lektsii po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi = Lectures on partial differential equations*. Moscow: Izd-vo ino-strannoy literatury, 1957. (In Russ.)
3. Laplace P.S. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles. *Memoires de l'Academie royale des Sciences de Paris*. 1773/77:341–402. [Reprinted: Oeuvres completes. Paris: Gauthier–Villars, 1893;9:5–68].
4. Fomin A.I., Titarenko V.I. System of defining equations for linear differential translators of the first order of the family of canonical hyperbolic equations. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XL Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Vyp. 4 (32) = Scientific discussion: issues of mathemat-*

- ics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 40th International scientific and practical conference. Issue 4 (32). Moscow: Internauka, 2016:15–27. (In Russ.)*
5. Fomin A.I. Laplace transforms as differential isomorphisms. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XLIV–XLVIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Vyp. 8-12 (35) = Scientific discussion: issues of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 44th – 48th International scientific and practical conference. Issue 8-12 (35). Moscow: Internauka, 2016:5–12. (In Russ.)*
6. Fomin A.I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2012;19(2):159–181.

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Иванович Фомин

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Институт экономики и менеджмента,
Российский государственный
университет имени А.Н. Косыгина
(Технологии. Дизайн. Искусство)
(Россия, г. Москва, ул. Малая
Калужская, 1)

E-mail: fomin45@mail.ru

Aleksandr I. Fomin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of higher mathematics,
Institute of Economics and Management,
Russian State University named after
A.N. Kosygin (Technology. Design. Art)
(1 Malaya Kaluzhskaya street,
Moscow, Russia)

Вера Ивановна Титаренко

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и информатики, Институт
информационных систем,
Государственный университет
управления (Россия, г. Москва,
Рязанский проспект, 99)

E-mail: vera_xmel@mail.ru

Vera I. Titarenko

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and computer science, Institute
of Information Systems, State University
of Management (99 Ryazanskiy avenue,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 15.05.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.09.2023

Принята к публикации / Accepted 10.11.2023

УДК 621.383.4, 621.382.2
doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-11

Способы приведения временной зависимости фототока резистора к форме интенсивности оптических импульсов, частота следования которых выше граничной частоты фотоприемника

В. Я. Гришаев¹, Е. В. Никишин²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия

¹grishaev53@mail.ru, ²nikishin57@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Зависимости интенсивности света от времени и фототока, протекающего в резисторе, в общем случае описываются различными функциями. Исследованы способы получения зависимости от времени интенсивности импульсов света произвольной формы, следующих с частотой ω , по зависимости фототока от времени при наличии рекомбинации носителей заряда на поверхности полупроводника. *Материалы и методы.* Результаты получены на основе исследования кинетики фотопроводимости резистора для линейного и квадратичного закона рекомбинации в объеме полупроводника. Учтена диффузия неравновесных носителей заряда к поверхностям фоторезистора с их последующей поверхностной рекомбинацией. Первый способ основан на использовании операции дифференцирования фототока. Второй способ позволяет восстановить интенсивность оптического импульса произвольной формы по амплитудам гармоник разложения функции, задающей зависимость тока от времени, в ряд Фурье. *Результаты и выводы.* Нелинейные, частотные и фазовые искажения в области больших частот ω малы. Предложенные способы справедливы при выполнении неравенства $\omega\tau \geq 1$ (τ – эффективное время жизни основных носителей заряда).

Ключевые слова: кинетика фотопроводимости, темп генерации, темп рекомбинации, нелинейные искажения, поверхностная рекомбинация

Для цитирования: Гришаев В. Я., Никишин Е. В. Способы приведения временной зависимости фототока резистора к форме интенсивности оптических импульсов, частота следования которых выше граничной частоты фотоприемника // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 126–137. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-11

Methods for bringing the time dependence of photocurrent resistor to the shape of the optical pulses' intensity, the repetition frequency of which is higher than the boundary frequency of the photodetector

V.Ya. Grishaev¹, E.V. Nikishin²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

© Гришаев В. Я., Никишин Е. В., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

¹grishaev53@mail.ru, nikishin57@mail.ru

Abstract. *Background.* The dependences of the light intensity on time and the photocurrent flowing in the resistor are generally described by various functions. Methods have been studied for obtaining the time dependence of the intensity of light pulses of arbitrary shape, following with a frequency ω , from the time dependence of the photocurrent in the presence of recombination of charge carriers on the surface of the semiconductor. *Materials and methods.* The results were obtained based on a study of the kinetics of photoconductivity of a resistor for linear and quadratic recombination laws in the bulk of a semiconductor. The diffusion of nonequilibrium charge carriers to the surfaces of the photoresistor with their subsequent surface recombination is taken into account. The first method is based on the use of the photocurrent differentiation operation. The second method allows you to restore the intensity of an optical pulse of an arbitrary shape from the amplitudes of the harmonics of the expansion of the function that specifies the dependence of the current on time in a Fourier series. *Results and conclusions.* Nonlinear, frequency and phase distortions in the region of high frequencies are small. The proposed methods are valid when the inequality $\omega\tau \geq 1$ (τ is the effective lifetime of the main charge carriers) is fulfilled.

Keywords: photoconductivity kinetics, generation rate, recombination rate, nonlinear distortions, surface recombination

For citation: Grishaev V.Ya., Nikishin E.V. Methods for bringing the time dependence of photocurrent resistor to the shape of the optical pulses' intensity, the repetition frequency of which is higher than the boundary frequency of the photodetector. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):126–137. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-11

Введение

Зависимость фототока от времени может значительно отличаться от зависимости интенсивности падающего на фотоприемник света при любом законе рекомбинации, включая линейный. Фотоприемник можно использовать в качестве интегрирующего устройства для числа поглощенных квантов, если длительность одиночного импульса света T меньше времени жизни основных

носителей заряда τ ($T < \tau$): $j(t) \approx \mu \tau E \int_0^t g(t) dt$ [1]. Здесь μ – подвижность

основных носителей заряда, E – напряженность электрического поля. Приведенное соотношение справедливо для произвольного закона рекомбинации носителей заряда. Темп генерации пропорционален плотности потока световых квантов Φ , следовательно, и интенсивности, так как $I = h\nu\Phi$. В частности, при межзонной генерации носителей заряда $g_n = g_p = \alpha\beta(1-R)I/(h\nu)$. Используются обозначения β – квантовый выход, α – коэффициент поглощения, R – коэффициент отражения. Следовательно, при выполнении неравенства $T < \tau$ фотоприемник является интегрирующим устройством и для плотности потока световых квантов, и для интенсивности.

При линейном законе рекомбинации и освещении светом, интенсивность которого изменяется периодически с частотой ω , существует область частот ($\omega\tau \ll 1$), где плотность тока пропорциональна интенсивности. С увеличением частоты ω , когда справедливо неравенство $\omega\tau \geq 1$, зависимость

$I(\omega t)$ отличается от зависимости $j(\omega t)$. Изменение формы импульса связано в этом случае с нелинейными, амплитудными и фазовыми искажениями [1, 2]. При наличии других законов рекомбинации (например, рекомбинации Шокли – Рида, межзонной, Оже, поверхностной рекомбинации) зависимость концентрации носителей заряда изменяется сложным образом [4–9]. Зависимости $I(\omega t)$ и $j(\omega t)$ различны.

Повышение эффективности генерации светом электронно-дырочных пар в толще образца непосредственно связано с их рекомбинацией на поверхности. Рекомбинационные характеристики поверхностного слоя можно характеризовать скоростью поверхностной рекомбинации, уменьшение которой приводит к увеличению времени жизни носителей. Для увеличения чувствительности детекторов излучения используется эффект электронного ограничения [3].

В общем случае связь между зависимостью интенсивности света от времени и фототока описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Нами определены параметры импульсов света, следующих с частотой ω , при которых можно получить зависимость $I(\omega t)$ по зависимости $j(\omega t)$ или по зависимости $dj(\omega t)/dt$. Исследования приведены для линейного ($R(n) = \alpha(n - n_0)$) и квадратичного ($R(n) = \alpha(n - n_0)^2$) законов объемной рекомбинации при наличии поверхностной рекомбинации, приводящей к диффузии электронов и дырок. Для восстановления формы оптических импульсов исследовалась возможность использования соотношений:

$$I(\omega t) \propto j(\omega t); \quad (1)$$

$$\tilde{I}(\omega t) \propto dj(t)/dt, \quad (2)$$

где $\tilde{I}(\omega t)$ – переменная составляющая интенсивности.

При расчете искажений, возникающих при использовании формулы (1), входной величиной является интенсивность света, выходной – плотность тока. При использовании формулы (2) входная величина – интенсивность света, выходная – производная по времени от плотности тока.

Численными методами исследована модель фоторезистора с проводимостью n -типа в предположении отсутствия объемного заряда. Изменение концентрации электронов n по толщине полупроводника с течением времени описывается уравнениями [4]:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = g_n(x, t) - R(n) - D_n \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

здесь D_n – коэффициент диффузии электронов; α – коэффициент квадратичной рекомбинации.

Учет поверхностной рекомбинации сделан через краевые условия [4]:

$$D_n \left. \frac{dn(t)}{dx} \right|_{x=0} = S_1 n(t) \Big|_{x=0}, \quad D_n \left. \frac{dn(t)}{dx} \right|_{x=d} = -S_2 n(t) \Big|_{x=d}, \quad (4)$$

здесь S_1 и S_2 коэффициенты поверхностной рекомбинации на границах полупроводника

Начальные условия:

$$n(x,0) = n_0, \quad p(x,0) = p_0. \quad (5)$$

Решая уравнение (3) с граничными и начальными условиями (4)–(5), получаем функцию распределения концентрации электронов по толщине полупроводника $n = n(x,t)$. Зависимость фототока от времени для полупроводника n -типа рассчитывалась по формуле

$$j(t) = \frac{e}{d} \int_0^d \mu_n n(x,t) E dx. \quad (6)$$

Нами использованы следующие значения параметров полупроводника и импульсов света: амплитуда темпа генерации $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$, толщина фоточувствительного слоя $d = 100 \text{ мкм}$, объемное время жизни при линейном законе рекомбинации $\tau = 0,3 \text{ мкс}$, коэффициент квадратичной рекомбинации $\alpha = 10^5 \text{ см}^3\text{с}^{-1}$, подвижность $\mu_n = 1400 \text{ см}^2/(\text{В с})$. Указанная величина подвижности характерна для подвижности электронов в кремнии. Поскольку использовано предположение об отсутствии объемного заряда, из уравнения Пуассона следует, что $E = \text{const}$.

1. Коэффициент нелинейных искажений

Одним из параметров, характеризующих качество восстановленных импульсов, является коэффициент нелинейных искажений (КНИ). Его величина позволяет судить о появлении гармоник в зависимости фототока от времени при возбуждении фотоприемника импульсами света, переменная составляющая интенсивности которых изменяется по гармоническому закону:

$$I(t) = I_0 (1 - \cos(\omega t)), \quad (7)$$

При периодическом возбуждении возникнут вынужденные колебания концентраций неравновесных носителей заряда и фототока. Основная частота их колебаний равна частоте, с которой меняется интенсивность падающего света. Зависимость фототока от времени представим в виде ряда Фурье [10]:

$$j(t) = j_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |j_k| \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad (8)$$

здесь $j_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} j(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau$, $\varphi_k = \arg j_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Возникшие гармоники фототока отражают искажения оптического импульса, если для его восстановления использовать соотношение (1). КНИ рассчитывался по формуле

$$K = \frac{1}{|j_1|} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} |j_k|^2}. \quad (9)$$

Зависимости КНИ от частоты следования импульсов представлены на рис. 1 (кривые 1–3). Кривая 1 получена для линейного закона рекомбинации при наличии поверхностной рекомбинации. Значение величины КНИ в этом случае во всей области частот меньше 0,01. На кривой зависимости $K = K(\nu)$ наблюдаются экстремумы. Максимум искажений приходится на частоту, определяемую соотношением: $\omega_{\max} \approx \tau^{-1}$. Увеличение коэффициента поверхностной рекомбинации сдвигает положение максимума в сторону больших частот. Кривые 2, 3 на рис. 1 соответствуют случаю квадратичного закона рекомбинации при отсутствии и наличии поверхностной рекомбинации соответственно. В этом случае величина КНИ значительна в области малых частот, когда $\omega\tau < 1$. Функция $K(\nu)$ имеет минимум.

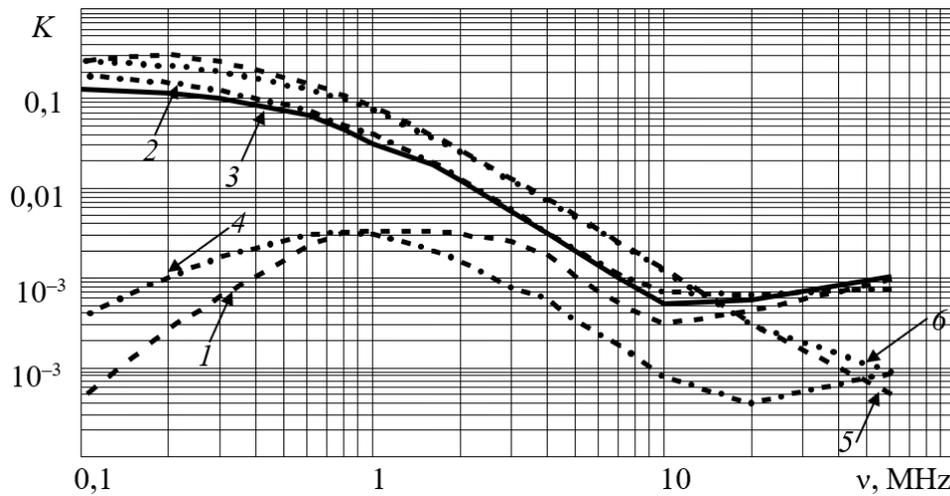


Рис. 1. Зависимость коэффициента нелинейных искажений восстановленного импульса от частоты: $S_{0i} = S_{di} = 0$ см/с при $i = 2, 5$; $S_{0i} = S_{di} = 1000$ см/с при $i = 1, 3, 4, 6$

В работе [1] предложен способ восстановления формы оптических импульсов, основанный на операции дифференцирования фототока по времени (2). КНИ в этом случае рассчитывался по формулам:

$$K = \frac{1}{|c_1|} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} |c_k|^2}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dj(\tau)}{d\tau} e^{-ik\omega\tau} d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Соответствующие кривые представлены на рис. 1 (кривые 4–6).

При линейном законе объемной рекомбинации ($R(n) = \alpha\Delta n$) время жизни уменьшается и не зависит от скорости генерации носителей заряда светом. В этом случае зависимости $K = K(\nu)$, рассчитанные по формуле (10) (кривая 4 на рис. 1), аналогичны кривым, полученным по соотношениям (9) (кривая 1 на рис. 1). При квадратичном законе рекомбинации (кривые 5 и 6 на рис. 1) величина КНИ монотонно убывает с увеличением частоты. При выполнении неравенства $\omega\tau > 1$ или $\omega > \omega_{\min}$ ($\omega_{\min} \approx 1/\tau$) КНИ становится малым. Для оценки ω_{\min} можно использовать соотношения, полученные в ра-

боте [9]. При квадратичном законе рекомбинации эффективное время жизни можно получить, используя формулу $\tau^{-1} = \alpha \Delta n(\omega \rightarrow \infty)$. Если влиянием поверхностной рекомбинации можно пренебречь, то при больших частотах

$$\Delta n(\omega \rightarrow \infty) = \left[\frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right]^{0,5}. \text{ В частности, } \omega_{\min} = \tau^{-1} = (\alpha g_0)^{0,5} \text{ при квад-}$$

ратичном законе рекомбинации и возбуждении импульсами света, интенсивность которого представлена формулой (7). Наличие поверхностной рекомбинации приводит к уменьшению τ и увеличению ω_{\min} . Уменьшение скорости генерации носителей заряда, толщины рабочей части фоторезистора и увеличение дефектов на поверхности может привести к преобладанию механизма поверхностной рекомбинации над объемной. Это, в свою очередь, приведет к линейному закону рекомбинации, следовательно, и уменьшению искажений.

2. Частотные искажения

Рассмотрим случай, когда среднее значение интенсивности, а значит, и темпа генерации, остается постоянным. Амплитуда переменной составляющей плотности фототока $\tilde{j}_0 = \max j(\omega t) - \int_t^{t+T} j(\omega t) dt / T$ и амплитуда восстановленного путем дифференцирования импульса $j'_0(\omega) = \max (dj(\omega t) / dt)$ будут зависеть от частоты, с которой изменяется интенсивность возбуждающего света: $\tilde{j}_0 = \tilde{j}_0(\omega)$, $j'_0 = j'_0(\omega)$ [9]. То есть возникнут частотные искажения. Для их количественной оценки введем коэффициент частотных искажений $Y(\omega)$. Для плотности тока имеем:

$$Y(\omega) = \frac{\tilde{j}_0(\omega)}{\max \tilde{j}_0(\omega)}. \quad (11)$$

Для восстановленного импульса под коэффициентом частотных искажений $Y_1(\omega)$ будем понимать отношение

$$Y_1(\omega) = \frac{j'_0(\omega)}{\max j'_0(\omega)}. \quad (12)$$

Зная коэффициент частотных искажений для функций $\tilde{j}_0 = \tilde{j}_0(\omega)$ и $j'_0(\omega)$, можно получить амплитуды гармоник периодически изменяющегося с основной частотой ω_1 оптического импульса произвольной формы:

$$I_0(\omega_k) = AY^{-1}(\omega_k) \tilde{j}_0(\omega_k), \quad (13)$$

$$I_0(\omega_k) = B [Y_1(\omega_k)]^{-1} j'_0(\omega_k), \quad (14)$$

здесь $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $\omega_k = k\omega_1$, $k = 1, 2, \dots$

На рис. 2 представлены зависимости Y и Y_1 от частоты: кривые 1–3 рассчитаны по формулам (11), кривые 4–6 – по формулам (12). Кривые 1 и 4 построены для линейного закона рекомбинации; кривые 2, 3, 5 и 6 – для квадратичного закона рекомбинации.

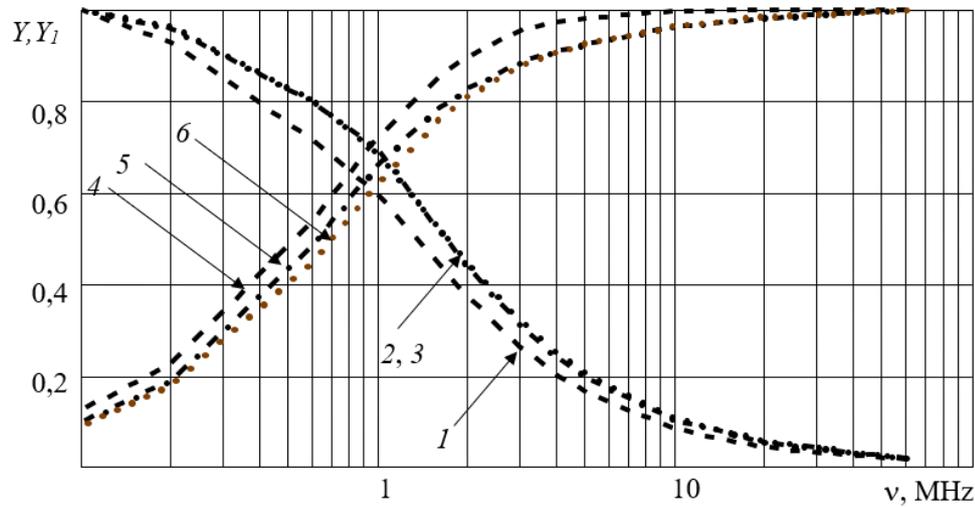


Рис. 2. Зависимость коэффициента частотных искажений от частоты:
 $S_{0i} = S_{di} = 0$ см/с при $i = 2, 5$; $S_{0i} = S_{di} = 1000$ см/с при $i = 1, 3, 4, 6$

Зависимости $Y = Y(\omega)$, рассчитанные по формуле (11) (кривые 1–3 рис. 2), монотонно убывают во всей области исследуемых частот вне зависимости от закона рекомбинации. То есть гармоники периодических импульсов света произвольной формы внесут различный вклад в величину фототока, что приведет к значительным частотным искажениям. При нелинейной рекомбинации и $\omega\tau < 1$ коэффициент частотных искажений зависит от интенсивности. Использовать соотношение (13) в этом случае для восстановления формы оптических импульсов нет смысла. Анализ полученных результатов показал, что при произвольном законе рекомбинации и $\omega\tau > 1$ справедливо соотношение $Y(\omega_k) = kY(\omega_1)$.

Коэффициент частотных искажений $Y_1(\omega)$ близок к единице в области больших частот, когда выполняется неравенство $\omega\tau > 1$. Следовательно, если для основной частоты ω_1 периодических импульсов света произвольной формы выполняется условие $\omega_1\tau > 1$, то частотными искажениями при восстановлении импульса путем дифференцирования можно пренебречь. Расчеты показали, что в области больших частот коэффициент частотных искажений не зависит от интенсивности падающего света. Независимость Y_1 и Y от интенсивности при $\omega\tau > 1$ связана с тем, что при больших частотах концентрация основных носителей заряда совершает малые колебания около стационарного значения n_s . Это позволяет линеаризовать рекомбинационный

член:
$$R(n) \approx R(n_s) + \frac{dR(n_s)}{dn}(n - n_s).$$

Для квадратичного закона рекомбинации имеем $R(n) \approx \alpha(n_s - n_0)^2 + 2\alpha(n_s - n_0)(n - n_s)$.

3. Фазовые искажения

Ток, протекающий через фоторезистор, отстает по фазе от импульса света. Зависимость сдвига фаз между различными гармониками электрического и оптического импульсов приведет к тому, что их формы будут различны. Это приводит к фазовым искажениям. Сдвиг фаз β между оптическим гармоническим импульсом $I(\omega t)$ и импульсом фототока $j(\omega t)$ находится по формуле

$$\beta = 2\pi(t_{\max}^* - t_{\max})/T, \quad (15)$$

здесь t_{\max}^* и t_{\max} – моменты времени, когда импульсы интенсивности $I(t)$ и импульс фототока $j(t)$ принимают максимальные значения. Расчеты показывают, что при малых частотах, когда $\omega t \ll 1$, фазовыми искажениями можно пренебречь. С увеличением частоты величина фазовых искажений увеличивается, стремясь к постоянной величине, равной $\pi/2$.

Использование операции дифференцирования гармонической функции изменяет ее фазу на $\pi/2$. Это приводит к тому, что гармонические импульсы интенсивности света отстают по фазе от импульсов, восстановленных путем дифференцирования фототока. Сдвиг фаз определяется соотношением (15), в котором t_{\max} – момент времени, соответствующий максимальному значению функции $dj(\omega t)/dt$. При больших длительностях импульса ($\omega t \ll 1$) фазовый сдвиг приближается к $\varphi = \pi/2$. Увеличение частоты ω приводит к монотонному уменьшению сдвига фаз между импульсом интенсивности света и «восстановленным» импульсом. Результаты зависимости сдвига фаз от частоты следования возбуждающих импульсов представлены на рис. 3. Кривые 1 и 3 рассчитаны для линейного закона рекомбинации, кривые 2 и 4 – для квадратичного. Увеличение поверхностной рекомбинации приводит к увеличению фазовых искажений при прочих равных условиях. Закон рекомбинации влияет на величину фазовых искажений. Фоторезистор с квадратичным законом рекомбинации дает больший фазовый сдвиг.

4. Метод интегрирования

Временную зависимость импульса интенсивности можно получить, используя разложение в ряд Фурье зависимости фототока от времени. Разложим функцию $I(t)$ в ряд Фурье четным образом [8]:

$$I(t) = \frac{I_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right). \quad (16)$$

Коэффициенты разложения имеют вид

$$I_0 = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) dt, \quad I_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt. \quad (17)$$

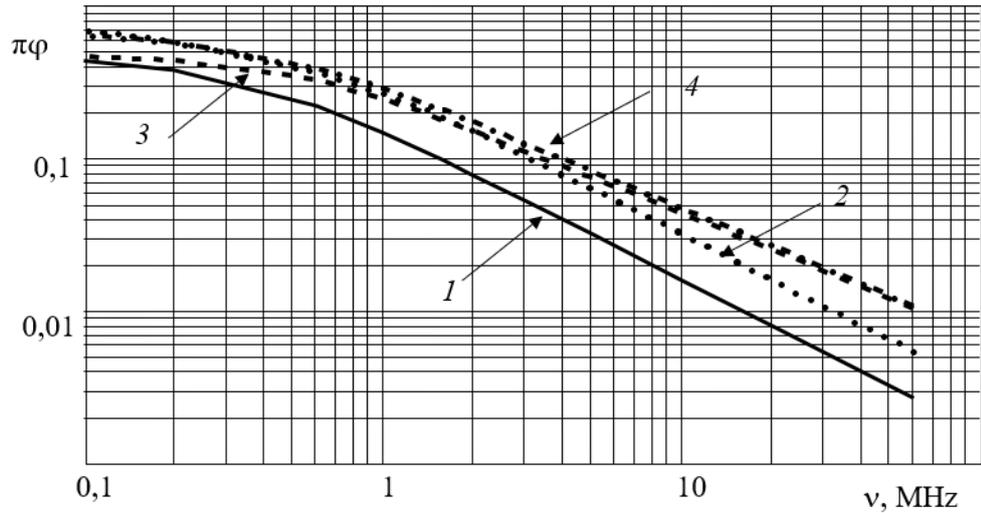


Рис. 3. Зависимость величины сдвига фаз между восстановленным импульсом и импульсом света от частоты: $S_{0i} = S_{di} = 0$ см/с при $i = 1, 2$; $S_{0i} = S_{di} = 1000$ см/с при $i = 3, 4$

Зависимость фототока от времени также будет периодической функцией, изменяющейся с той же частотой ω , что и интенсивность. Разложим функцию $j(t)$ в ряд Фурье четным образом:

$$j(t) = \frac{j_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} j_k \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right), \quad (18)$$

здесь

$$j_0 = \frac{2}{T} \int_0^T j(t) dt, \quad j_k = \frac{2}{T} \int_0^T j(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt. \quad (19)$$

Гармоники периодических импульсов света произвольной формы внесут различный вклад в величину фототока, что приведет к значительным частотным искажениям. Зная амплитуды гармоник фототока (19) и коэффициент частотных искажений (11), получаем амплитуды гармоник интенсивности света (13). Используя угол сдвига фаз между импульсом: интенсивности и импульсом фототока (15), для зависимости интенсивности света от времени получаем соотношение

$$I(t) = A \left[\frac{j_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{-1} j_k \cos\left(\frac{k\pi t}{T} - \beta_k\right) \right]. \quad (20)$$

Для переменной составляющей интенсивности имеем

$$\tilde{I}(t) \propto \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{-1} j_k \cos\left(\frac{k\pi t}{T} - \beta_k\right). \quad (21)$$

Выше было показано, что при больших частотах ($\omega\tau > 1$) для коэффициента частотных искажений справедливо $Y(\omega_k) = k Y(\omega_1)$, тогда

$$\tilde{I}(t) \propto \sum_{k=1}^{\infty} k j_k \cos\left(\frac{k\pi t}{T} - \beta_k\right). \quad (22)$$

При линейном законе рекомбинации и отсутствии поверхностной рекомбинации фазовый сдвиг можно рассчитать по формуле

$$\beta_k = \text{arctg}(\omega\tau). \quad (23)$$

Численные расчеты показали, что в области высоких частот ($\omega\tau > 1$) при любом законе рекомбинации для определения фазового сдвига можно использовать соотношение

$$\beta_k \approx \text{arctg}(\omega\tau), \quad \tau = \frac{n(\omega \rightarrow \infty) - n_0}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta}. \quad (24)$$

Если поверхностная рекомбинация мала, то справедливо соотношение [9]:

$$n_{\omega \rightarrow \infty} = R^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right], \quad (25)$$

где R^{-1} – функция, обратная функции R .

Заключение

Численное моделирование фотопроводимости резистора с учетом поверхностной рекомбинации позволяет утверждать, что при больших частотах ($\omega\tau > 1$) можно получить зависимость интенсивности света от времени по зависимости фототока от времени. Возможны два способа. Первый основан на дифференцировании фототока по времени. Входной сигнал – интенсивность, выходной – производная от фототока.

При больших частотах ($\omega\tau > 1$) справедливо соотношение (2). Способ дифференцирования можно применять для произвольного закона рекомбинации в объеме полупроводника и наличии поверхностной рекомбинации, приводящей к диффузии носителей заряда. Это связано с возможностью линеаризации рекомбинационного члена в уравнении (3). Коэффициент нелинейных искажений, коэффициент частотных искажений и сдвиг фаз между импульсами света и импульсами, восстановленными путем дифференцирования фототока малы.

Второй способ основан на использовании разложения фототока в ряд Фурье. Входной сигнал – интенсивность, выходной – фототок. При больших частотах ($\omega\tau > 1$) коэффициент, характеризующий частотные искажения, $Y(\omega_k) = k Y(\omega_1)$, сдвиг фаз определяется по формуле (24), коэффициент нелинейных искажений мал. Использование соотношения (22) позволяет получить зависимость интенсивности от времени.

Список литературы

1. Никишин Е. В. О границах применимости способа восстановления временной формы модулированных оптических сигналов с частотой выше граничной частоты фоторезистора // Физика и техника полупроводников. 2014. № 11 (48). С. 1526–1529. doi: 10.3367/UFNr.0172.200209e.1068
2. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В. Кинетика фотопроводимости при возбуждении высокочастотными импульсами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 4 (20). С. 242–250.
3. Алфёров Ж. И. Двойные гетероструктуры: концепция и применения в физике, электронике и технологии // Успехи физических наук. 2002. № 9 (172). С. 1068–1086. doi: 10.3367/UFNr.0172.200209d.1067
4. Милнс А. Г. Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках. М. : Мир, 1977. 568 с.
5. Филачев А. М., Таубкин И. И., Трищенко М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фоторезисторы и фотоприемные устройства. М. : Физматкнига, 2012. 367 с.
6. Холоднов В. А. Влияние концентрации рекомбинационных центров на фотоэлектрический отклик полупроводников // Успехи прикладной физики. 2015. № 3 (3). С. 254 – 280.
7. Холоднов В. А. Влияние фотоиндуцированного локального объемного заряда на эффективную скорость фотогенерации носителей в продольном фоторезисторе // Письма в журнал технической физики. 2022. № 14 (48). С. 30–33. doi: 10.21883/PJTF.2022.14.52867.19251
8. Каражанов С. Ж. Свойства точно компенсированных полупроводников // Физика и техника полупроводников. 2000. Т. 34, № 8. С. 909–916.
9. Денисов Б. Н., Никишин Е. В. Исследование кинетики неравновесных носителей в полупроводнике по среднему значению фотопроводимости при периодическом оптическом возбуждении // Физика и техника полупроводников. 2014. № 2 (48). С. 175–178. doi: 10.1134/S1063782614020079
10. Корн Г. К., Корн Т. К. Справочник по математике. М. : Наука, 1974. 1152 с.

References

1. Nikishin E.V. On the limits of applicability of the method for restoring the temporal shape of modulated optical signals with a frequency higher than the cutoff frequency of the photoresistor. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov = Physics and technology of semiconductors*. 2014;(11):1526–1529. (In Russ.). doi: 10.3367/UFNr.0172.200209e.1068
2. Goryunov V.A., Grishaev V.Ya., Nikishin E.V. Kinetics of photoconductivity under excitation by high-frequency pulses. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2012;(4):242–250. (In Russ.)
3. Alferov Zh.I. Double heterostructures: concept and applications in physics, electronics and technology. *Uspekhi fizicheskikh nauk = Advances in physical sciences*. 2002;(9):1068–1086. doi: 10.3367/UFNr.0172.200209d.1067
4. Milns A.G. *Primesi s glubokimi urovnyami v poluprovodnikakh = Impurities with deep levels in semiconductors*. Moscow: Mir, 1977:568. (In Russ.)
5. Filachev A.M., Taubkin I.I., Trishenkov M.A. *Tverdotel'naya fotoelektronika. Fotorezistory i fotopriemnye ustroystva = Solid-state photoelectronics. Photoresistors and photodetectors*. Moscow: Fizmatkniga, 2012:367. (In Russ.)
6. Kholodnov V.A. Influence of the concentration of recombination centers on the photoelectric response of semiconductors. *Uspekhi prikladnoy fiziki = Advances in applied physics*. 2015;(3):254 – 280. (In Russ.)

7. Kholodnov V.A. Influence of photoinduced local volume charge on the effective rate of photogeneration of carriers in a longitudinal photoresistor. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki = Letters to the journal of technical physics*. 2022;(14):30–33. (In Russ.). doi: 10.21883/PJTF.2022.14.52867.19251
8. Karazhanov S.Zh. Properties of precisely compensated semiconductors. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov = Physics and technology of semiconductors*. 2000;34(8):909–916. (In Russ.)
9. Denisov B.N., Nikishin E.V. Studying the kinetics of nonequilibrium carriers in a semiconductor based on the average value of photoconductivity under periodic optical excitation. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov = Physics and technology of semiconductors*. 2014;(2):175–178. (In Russ.). doi: 10.1134/S1063782614020079
10. Korn G.K., Korn T.K. *Spravochnik po matematike = Handbook of mathematics*. Moscow: Nauka, 1974:1152. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Яковлевич Гришаев

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры экспериментальной
и теоретической физики, Национальный
исследовательский Мордовский
государственный университет имени
Н. П. Огарева (Россия, г. Саранск,
ул. Большевикская, 68)

E-mail: grishaev53@mail.ru

Vladimir Ya. Grishaev

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of experimental
and theoretical physics,
Orgarev Mordovia State University
(68 Bolshevistskaya street, Saransk, Russia)

Евгений Васильевич Никишин

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры экспериментальной
и теоретической физики, Национальный
исследовательский Мордовский
государственный университет имени
Н. П. Огарева (Россия, г. Саранск,
ул. Большевикская, 68)

E-mail: nikishin57@mail.ru

Evgeny V. Nikishin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of experimental
and theoretical physics,
Orgarev Mordovia State University
(68 Bolshevistskaya street, Saransk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 13.06.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 21.09.2023

Принята к публикации / Accepted 07.11.2023

УДК 620.3:536.2.01

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-12

Кванты погонной теплоемкости и погонной тепловой индуктивности в наномасштабных теплопроводах

Р. А. Браже

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

brazhe@ulstu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Пространственная локализация фононного газа в пределах наноленты или нанотрубки, подобно локализации газа свободных носителей заряда, должна вызывать квантование тепловых характеристик нанотеплопровода, равно как имеет место квантование электрических характеристик в нанопроводниках электрического тока. Известен универсальный квант теплопроводности и обратный ему квант теплового сопротивления, аналогичный сопротивлению фон Клитцинга. Известны также кванты погонной емкости и погонной индуктивности. В связи с этим возникает актуальная задача поиска их тепловых аналогов, тем более, что теплоемкость известна, а тепловая индуктивность недавно обнаружена. Целью настоящей работы является решение данной задачи. *Материалы и методы.* Объектами исследования являются теплопроводы в виде нанолент и нанотрубок баллистической длины с поперечными размерами, не превышающими 100 нм, из гексагонального нитрида бора, являющегося диэлектриком. Это позволяет исключить из тепловых эффектов вклад электронов и ограничиться анализом лишь фононных эффектов. В работе использовались известные методы квантовой физики, физики твердого тела, кристаллофизики и квантовой теории явлений переноса. *Результаты.* Получены явные выражения для квантов погонной теплоемкости и погонной тепловой индуктивности, а также числа фононных каналов баллистической теплопроводности в наномасштабных двумерных теплопроводах. Показано, что на основе таких теплопроводов могут быть созданы резонаторы температурных волн терагерцового диапазона частот. *Выводы.* Показана возможность существования квантов погонной теплоемкости и погонной тепловой индуктивности в нанолентах и нанотрубках из гексагонального нитрида бора и получены описывающие их выражения. Показано, что в случае малого коэффициента термоупругого взаимодействия в указанных выше наномасштабных теплопроводах могут независимо друг от друга возбуждаться как упругие, так и температурные бегущие и стоячие волны.

Ключевые слова: наноленты, нанотрубки, кванты теплового сопротивления, теплоемкости и тепловой индуктивности, температурные волны

Для цитирования: Браже Р. А. Кванты погонной теплоемкости и погонной тепловой индуктивности в наномасштабных теплопроводах // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 138–150. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-12

Quanta of linear heat capacity and linear thermal inductance in nanoscale heat-conducting pipes

R.A. Brazhe

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

brazhe@ulstu.ru

© Браже Р. А., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstract. *Background.* The spatial localization of the phonon gas within a nanoribbon or nanotube, like the localization of a gas of free charge carriers, should cause quantization of the thermal characteristics of the nanothermoconductor, as well as the quantization of the electrical characteristics in electric current nanoconductors. There is a universal quantum of thermal conductivity and an inverse quantum of thermal resistance, similar to the von Klitzing resistance. The quanta of linear capacitance and linear inductance are also known. In this regard, there is an urgent task of searching for their thermal analogues, especially since the heat capacity is known, and the thermal inductance has recently been discovered. The purpose of this work is to solve this problem. *Materials and methods.* The objects of the study are heat conductors in the form of nanoribbons and nanotubes of ballistic length with transverse dimensions not exceeding 100 nm, made of hexagonal boron nitride, which is a dielectric. This makes it possible to exclude the contribution of electrons from thermal effects and limit the analysis to phonon effects only. The work used well-known methods of quantum physics, solid state physics, crystallophysics and quantum theory of transfer phenomena. *Results.* Explicit expressions are obtained for the quanta of linear thermal capacitance and linear thermal inductance, as well as the number of phonon channels of ballistic thermal conductivity in nanoscale two-dimensional heat conductors. It is shown that resonators of temperature waves of the terahertz frequency range can be created on the basis of such heat conductors. *Conclusions.* The possibility of the existence of quanta of linear thermal capacitance and linear thermal inductance in nanoribbons and nanotubes made of hexagonal boron nitride is shown and expressions describing them are obtained. It is shown that in the case of a small coefficient of thermoelastic interaction, both elastic and temperature traveling and standing waves can be excited independently in the above-mentioned nanoscale heat conductors.

Keywords: nanoribbons, nanotubes, quanta of thermal resistance, thermal capacitance and thermal inductance, temperature wave

For citation: Brazhe R.A. Quanta of linear heat capacity and linear thermal inductance in nanoscale heat-conducting pipes. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):138–150. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-12

Введение

Сравнивая два явления переноса: электропроводность и теплопроводность, нельзя не заметить, что они во многом похожи как в смысле математического описания, так и с точки зрения физики процесса. Уравнение для плотности потока заряда (закон Ома в дифференциальной форме) аналогично уравнению для плотности потока количества теплоты (закону Фурье). Есть понятие электрического сопротивления проводника с током и есть понятие теплового сопротивления в направлении теплового потока. Существует электроемкость проводника и существует теплоемкость тела. Наконец, в 2021 г. К. Окава и соавторы открыли тепловую индуктивность [1] – аналог электрической индуктивности – в проводящей пластине, прикладывая к ее концам переменное напряжение и измеряя потоки тепла Пельтье. Возникающая инерционность теплового потока может трактоваться как наличие тепловой индуктивности, подобно инерции, возникающей при изменении магнитного потока.

Указанную термоэлектромагнитную аналогию можно продолжить. Благодаря размерному квантованию энергетических состояний электронов в наномасштабных проводниках малого поперечного сечения, которые можно рассматривать как квантовые потенциальные ямы, в них появляются кван-

ты электропроводности соответствующего электрического сопротивления [2], кванты погонной емкости и кванты погонной индуктивности [3]. От соответствующих электродинамических параметров они отличаются тем, что квантовое сопротивление не зависит от длины проводника и не приводит к выделению джоулева тепла, а квантовая индуктивность не связана с наличием магнитного поля. Благодаря тому, что длина свободного пробега носителей заряда в наномасштабных проводниках, например в графеновых нанолентах, может достигать 1000 нм, наномасштабные линии передачи, в которых реализуется режим баллистического транспорта носителей заряда, являются весьма перспективными для использования в нанофотонике и наноплазмонике. Известен также квант теплопроводности, существование которого обусловлено размерным квантованием фононов в наномасштабных проводниках тепла [4–6]. Логично ожидать, что в наномасштабных теплопроводах должны иметь место и кванты погонной теплоемкости, и кванты погонной тепловой индуктивности. В связи с этим возникает актуальная задача поиска таких квантов и исследования возможностей создания наномасштабных линий передачи для тепловых волн и резонаторов на их основе. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

Материалы и методы

Рассмотрим в качестве объекта исследования теплопроводы в виде нанолент и нанотрубок из гексагонального нитрида бора (h-BN). Он изоморфен графену, у него примерно такая же длина межатомной связи, что и в графене, однако, в отличие от последнего, он является диэлектриком. Это позволяет исключить из рассмотрения вклад в теплоемкость и теплопроводность электронов и ограничиться анализом лишь фононных эффектов.

Как и в графене, в кристаллической решетке h-BN приходится два атома на элементарную ячейку. Следовательно, имеется 6 фононных мод: 3 акустические (продольная, поперечная и изгибная) и 3 оптические тех же типов [7]. Дифференцируя дисперсионные кривые, можно найти групповые скорости соответствующих фононов. Затем, используя модель трехфононного взаимодействия, предложенную в [8, 9], вычислить их средние времена жизни и найти среднюю длину свободного пробега фононов. Различные фононы имеют разные времена жизни и вносят разный вклад в теплопроводность. Как показано в работе [10], в случае h-BN наибольший вклад (~53,3 %) в суммарную теплопроводность дают продольные акустические фононы со средней длиной свободного пробега 1274 нм. В связи с этим примем длину рассматриваемых нанотеплопроводов не превышающей 1 мкм, а их поперечные размеры не превышающими 100 нм.

В работе использовались известные методы квантовой физики, физики твердого тела, кристаллофизики и квантовой теории явлений переноса в наномасштабных структурах.

Кванты тепловых характеристик наномасштабных теплопроводов

Квант теплового сопротивления. Выражение для универсального кванта теплопроводности имеет следующий вид [4–6]:

$$G_0^{(\Theta)} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{h} T, \quad (1)$$

где k_B – постоянная Больцмана; h – постоянная Планка; T – абсолютная температура. Оно описывает теплопроводность одного канала фононного транспорта. Соответственно выражение для *кванта теплового сопротивления* имеет вид

$$R_0^{(\Theta)} = \frac{3}{\pi^2} \frac{h}{k_B^2 T}. \quad (2)$$

Он аналогичен известному из квантового эффекта Холла [11] кванту электрического сопротивления – сопротивлению фон Клитцинга $R_K = h/e^2 \approx 25,8$ кОм (где e – элементарный электрический заряд), определяющему электрическое сопротивление одного квантового канала электронного транспорта. Квант теплового сопротивления обратно пропорционален температуре теплопровода и при $T = 300$ К $R_0^{(\Theta)} \approx 3,58 \cdot 10^9$ К·Вт⁻¹.

Для нахождения квантового теплового сопротивления наномасштабного теплопровода выражение (2) нужно поделить на число каналов фононного транспорта M_{ph} , так как они соединены параллельно друг другу:

$$R_{\Theta} = \frac{R_0^{(\Theta)}}{M_{ph}}. \quad (3)$$

В случае наноленты шириной W число таких каналов находится по формуле [12]:

$$M_{ph} = W \frac{\omega_m}{\pi v_L}, \quad (4)$$

где ω_m – максимальная частота фононов; v_L – скорость распространения продольных акустических фононов как вносящих наибольший вклад в теплопроводность.

Фактически выражение (4) показывает, сколько упругих полуволин укладывается на ширине наноленты. На длине окружности поперечного сечения нанотрубки должно укладываться целое число длин волн, поэтому для нанотрубки диаметром d имеем

$$M_{ph} = \frac{d}{2} \frac{\omega_m}{v_L}. \quad (5)$$

Формулы (4), (5) определяют верхний предел для теплопроводности, поскольку не учитывают вклад других фононных мод и зависимость этого вклада от температуры.

Квант погонной теплоемкости. Выражение для молярной теплоемкости в однонаправленном теплопереносе можно записать в виде [13]:

$$C_{1\mu} = \frac{\pi^2}{3} R \frac{T}{\Theta_D}, \quad (6)$$

где R – универсальная газовая постоянная; $\Theta_D = \hbar\omega_m / k_B$ – температура Дебая; здесь $\hbar = h / (2\pi)$ – приведенная постоянная Планка. Теплоемкость всего

нанотеплопровода, содержащего ν молей, будет $C_1 = \nu C_{1\mu}$. Далее сделаем следующие преобразования в (6): запишем $R = k_B N_A$, где N_A – число Авогадро; обозначим $\nu N_A = N = n_2 W L$, где N – число атомов в наноленточном теплопроводе длиной L , а n_2 – их двумерная концентрация; обозначим $\omega_m \nu L = k_m$, где k_m – максимальное значение волнового числа фонона; воспользуемся формулой (4). Затем заметим, что $n_2 = 1/a^2$, a – среднее расстояние между атомами в двумерной структуре. Оно равно половине минимальной длины упругой волны: $a = \lambda_{\min} / 2 = \pi / k_m$. Отсюда с учетом (4) получаем

$$n_2 = \left(\frac{k_m}{\pi} \right)^2 = \left(\frac{M_{ph}}{W} \right)^2. \quad (7)$$

Тогда выражение (6) может быть записано в виде

$$C_2^{(\Theta)} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{h\nu_L} T M_{ph} L, \quad (8)$$

где индекс «2» учитывает двумерный характер нанотеплопровода, содержащего M_{ph} каналов фононного транспорта. Поделив (8) на $M_{ph} L$, получаем выражение для *кванта погонной теплоемкости*:

$$C_{20}^{(\Theta)} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{h\nu_L} T, \quad (9)$$

при $T = 300$ К в h-BN ($\nu_L = 1,14 \cdot 10^4$ м/с [10]) $C_{20}^{(\Theta)} = 4,97 \cdot 10^{-14}$ Дж·К⁻¹·м⁻¹.

Квант погонной тепловой индуктивности. При баллистическом распространении по теплопроводу возрастает кинетическая энергия фононов. При наличии разности электрических потенциалов U приращение энергии электрического поля, связанное с наличием емкости C , находится по формуле $\Delta E_k = (1/2) C U^2$. При наличии разности температур ΔT (аналог разности электрических потенциалов) приращение энергии теплового поля, связанное с наличием теплоемкости $C_2^{(\Theta)}$, должно находиться по формуле $\Delta E_k = (1/2) C_2^{(\Theta)} (\Delta T)^2$. Подставляя сюда (8), получаем

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{\pi^2} \frac{hL}{k_B^2 \nu_L M_{ph}} \frac{1}{T} \right) \left(\frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2 M_{ph} T}{h} \Delta T \right)^2.$$

Полученная формула в свернутом виде выглядит как $\Delta E_k = (1/2) L_2^{(\Theta)} \left(I^{(\Theta)} \right)^2$. Выражение во вторых скобках есть не что иное, как сила фононного тока $I^{(\Theta)} = \Delta T / R_\Theta$ (тепловой аналог закона Ома для одно-

родного участка цепи), а выражение в первых скобках – это тепловая индуктивность

$$L_2^{(\Theta)} = \frac{6}{\pi^2} \frac{hL}{k_B^2 v_L M_{ph}} \frac{1}{T}. \quad (10)$$

Из (10) для одного фононного канала ($M_{ph} = 1$), поделив на L , получаем формулу для погонной тепловой индуктивности – *кванта погонной тепловой индуктивности*:

$$L_{20}^{(\Theta)} = \frac{6}{\pi^2} \frac{h}{k_B^2 v_L} \frac{1}{T}. \quad (11)$$

При $T = 300$ К в h-BN $L_{20}^{(\Theta)} = 6,19 \cdot 10^5$ К·с·ВТ⁻¹·м⁻¹.

В завершение данного раздела отметим, что физический смысл квантовой тепловой индуктивности состоит в том, что она является мерой препятствия теплопровода изменению фононного тока. Аналогично тому, как в электрическом проводнике при изменении электрического тока возникает ЭДС самоиндукции и появляется индукционный ток, направленный таким образом, чтобы препятствовать изменению исходного тока, при изменении фононного тока в теплопроводе индуцируется разность температур и появляется индукционный тепловой поток (фононный ток), направленный так, чтобы препятствовать изменению исходного теплового потока.

Температурные волны в наномасштабных теплопроводах

Ввиду того, что акустические фононы обуславливают и тепловые, и упругие эффекты, в теплопроводах могут распространяться в общем случае связанные термоупругие волны. Теории этих волн в основном базируются на двух моделях: модели Лорда и Шульмана [14], содержащей одно время релаксации как механических напряжений, так и температуры, и модели Грина и Линдсэя [15], оперирующей двумя временами релаксации, отдельно для температурных и термоупругих возмущений. В дальнейшем в рамках этих моделей были разработаны теории термоупругих волн в анизотропных средах [16–18].

В рамках модели Лорда – Шульмана уравнения движения и энергии применительно к чисто продольным термоупругим волнам, распространяющимся вдоль кристаллофизического направления x_1 в h-BN, можно записать в виде, вытекающем из соответствующих уравнений для трехмерной анизотропной термоупругой среды, исследованной в работе [18]:

$$c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \beta_{11} \beta_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$G_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = T_0 \beta_{11} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (13)$$

здесь c_{11} и G_{11} – соответственно компоненты тензоров упругих жесткостей и теплопроводностей в матричном представлении; u_1 – смещение частиц сре-

ды; T – температура; $\beta_{11} = c_{11}\alpha_{11}$ – компонент тензора коэффициентов термоупругого взаимодействия (α_{11} – коэффициент теплового расширения); ρ – двумерная плотность среды; c – ее удельная теплоемкость при постоянном механическом напряжении; t – время; τ_0 – время тепловой релаксации; T_0 – равновесная температура.

Поскольку коэффициент теплового расширения α_{11} в большинстве кристаллических материалов невелик, то и коэффициент термоупругого взаимодействия β_{11} также мал. Пренебрегая им, уравнения (12), (13) можно переписать в виде двух волновых уравнений, описывающих невзаимодействующие продольные упругие и температурные волны:

$$c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$G_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right). \quad (15)$$

Упругая волна, описываемая уравнением (14), имеет решение вида

$$u_1 = u_{1m} \cos(\omega t - kx_1), \quad (16)$$

линейную дисперсию ($\omega = v_L k$) и распространяется со скоростью

$$v_L = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}. \quad (17)$$

Температурная волна, описываемая уравнением (15), является затухающей:

$$\Theta = \Theta_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t - kx_1), \quad (18)$$

имеет квадратичную дисперсию ($\omega^2 = v_\Theta^2 k^2 - \beta^2$) и распространяется с фазовой скоростью

$$v_\Theta = \sqrt{\frac{G_{11}}{\rho c \tau_0}}. \quad (19)$$

В уравнении (18) $\Theta = T - T_0$, $\beta = 1/(\tau_0)$ – коэффициент затухания, а амплитуда упругой волны в (16) u_{1m} и начальная амплитуда температурной волны в (18) Θ_{m0} определяются начальными условиями задачи.

Из вида дисперсионного уравнения для температурной волны следует, что ее волновое число обрезано снизу значением $k_{\min} = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} / v_\Theta$ и ее групповая скорость превышает фазовую скорость (аномальная дисперсия), что означает аperiодическое затухание при $\beta \geq v_\Theta k$.

Отметим, что определяющее величину затухания температурных волн в нанотеплопроводе время тепловой релаксации τ_0 отлично от нуля даже

в режиме баллистического транспорта фононов, поскольку имеется квантовое тепловое сопротивление R_{Θ} , и согласно (3), (10) получаем

$$\beta = \frac{R_{\Theta}}{2L_2^{(\Theta)}} = \frac{v_L}{4L}. \quad (20)$$

Используя соотношения (1), (8), (19), можно получить также выражение для фазовой скорости температурных волн:

$$v_{\Theta} = \frac{v_L}{2} \sqrt{\frac{W}{L}}. \quad (21)$$

Из (17) и (21) следует, что, в отличие от упругих волн, температурные волны распространяются медленнее и скорость их распространения зависит от габаритов теплопровода.

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим в качестве примера два нанотеплопровода: в виде h-BN наноленты с краями типа «зигзаг» и h-BN нанотрубки с торцами типа «кресло» (рис. 1). Исходя из соображений, что чем уже поперечные размеры теплопровода, тем более высокочастотные температурные волны в нем можно возбуждать, примем ширину наноленты W не превышающей 1,5 нм – результат известных достижений по выращиванию похожих на h-BN графеновых нанолент [19]. Поскольку длина межатомной связи в h-BN $l_{\text{BN}} = 1,45$, это позволяет изготовить наноленту шириной $W_{\text{min}} = 1,31$ нм, т.е. 3 парам смежных гексагонов. Реально также вырастить нанотрубку хиральности (6,6), диаметр которой $d_{\text{min}} = 2,62$ нм.

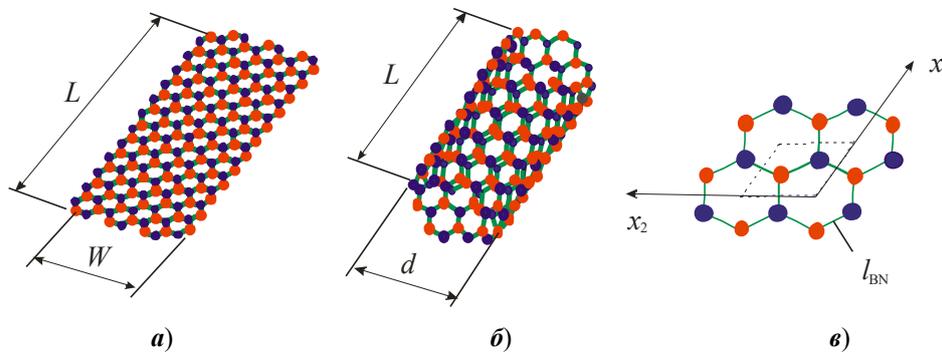


Рис. 1. Исследуемые нанотеплопроводы: *a* – h-BN нанолента; *b* – h-BN нанотрубка; *в* – элементарная ячейка структуры и выбор кристаллофизических осей

Тогда минимальная длина температурной волны, которая может быть возбуждена в рассматриваемых нанотеплопроводах, будет $\lambda_{\Theta\text{min}} = 2,62$ нм. Если их длина $L = 1$ мкм, то согласно (21) скорость распространения такой температурной волны будет $v_{\Theta} = 292$ м/с, что в 39 раз меньше скорости распространения упругих волн в h-BN. Соответствующая такой длине волны максимальная частота колебаний $\nu_{\text{max}} = 111$ ГГц.

Число фононных каналов, участвующих в распространении температурных волн в данных наноленте и нанотрубке, будет соответственно 1 и 3.

В табл. 1 представлены результаты расчетов с использованием формул (3), (8), (10) квантового теплового сопротивления R_{Θ} , погонного значения квантовой теплоемкости $C_0^{(\Theta)}$ и погонного значения квантовой тепловой индуктивности $L_0^{(\Theta)}$ исследуемых теплопроводов. Там же представлены результаты расчета их волнового сопротивления $Z_0 = \sqrt{L_0^{(\Theta)} / C_0^{(\Theta)}}$.

Таблица 1

Характеристики исследуемых теплопроводов для температурных волн частотой 111 GHz

Теплопровод	R_{Θ} , $10^9 \text{ K} \cdot \text{Вт}^{-1}$	$L_0^{(\Theta)}$, $10^5 \text{ K} \cdot \text{с} \cdot \text{Вт}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$	$C_0^{(\Theta)}$, $10^{-14} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$	Z_0 , $10^9 \text{ K} \cdot \text{Вт}^{-1}$
h-NB NR	3,58	6,19	4,97	3,58
h-NB NT	1,19	2,06	14,9	1,19

Примечание. NR (nanoribbon) – нанолента, NT (nanotube) – нанотрубка, ширина наноленты $W = 1,31$ нм, диаметр нанотрубки $d = 2,62$ нм, длина теплопровода $L = 1,00$ мкм, равновесная температура $T = 300$ К.

Из формулы (20) видно, что коэффициент затухания в исследуемых нанотеплопроводах в режиме баллистического фононного транспорта тем меньше, чем больше длина теплопровода. Этот непривычный факт объясняется тем, что данное затухание происходит не в пространстве, а во времени, и соответствующий коэффициент обратно пропорционален тепловой индуктивности. Последняя, как уже указывалось выше, является мерой препятствия изменению фононного тока и возрастает с увеличением длины теплопровода.

Согласно (20) минимальный коэффициент затухания при длине теплопровода $L = 1$ мкм составляет $\beta = 2,85 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, что соответствует времени тепловой релаксации $\tau_0 = 3,50 \cdot 10^{-10}$ с. При частоте сигнала $\nu = 111$ ГГц число колебаний, за которое амплитуда температурной волны в таком теплопроводе, уменьшится в «е» раз, $N_e = \nu \tau_0 = 38$.

При определенном соотношении между частотой сигнала и длиной теплопровода в нем возможно существование стоячих температурных волн. В условиях свободных концов теплопровода в режиме стоячей волны на них должны образоваться пучности температуры. Следовательно, для образования стоячих температурных волн на длине теплопровода должно укладываться целое число их полуволн. Максимальная длина баллистического теплопровода, при которой он превращается в n -полуволновый резонатор на частоте $\nu = 111$ ГГц, соответствует $n = 763$ и равна 999 нм. Добротность такого резонатора $Q = \pi N_e = 119$. С уменьшением n добротность ухудшается.

Из изложенного следует, что в наномасштабных теплопроводах типа h-BN нанолент и нанотрубок длиной, не превышающей длины баллистического пробега фононов, возможно существование бегущих и стоячих температурных волн, не связанных с упругими волнами. Такие волны могут наблюдаться на частотах порядка 100 ГГц, а их параметры доступны экспериментальному измерению.

Проблемой остается возбуждение температурных волн. Для этого можно использовать фемтосекундные лазеры с частотой повторения импульсов в несколько десятков гигагерц. Твердотельные лазеры такого типа со средней мощностью от 100 мВт до 1 Вт имеются, но из-за дифракционных ограничений диаметр их фокального пятна при фокусировании обычными линзами не превышает 1 мкм для ближней инфракрасной области спектра электромагнитных волн. Нам же требуется сфокусировать лазерный луч в пятно диаметром порядка 1 нм. К сожалению, ни предложенные в 2000 г. Дж. Пендри суперлинзы из метаматериалов с отрицательным коэффициентом преломления [20], ни их усовершенствованные варианты, использующие плазмонные метаматериалы [21], ни какие-либо другие известные попытки существенно обойти дифракционный предел фокусировки излучения из видимой и ближней к ней части спектра электромагнитных волн пока не позволяют получать фокальные пятна таких ультрамалых размеров. По-видимому, единственным способом лазерного возбуждения температурных волн в нанотеплопроводах в настоящее время является попытка «зацепить» торец нанотеплопровода краем обычного фокального пятна.

Заключение

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать такие выводы:

1. Показана возможность существования квантов погонной теплоемкости и погонной тепловой индуктивности в наномасштабных теплопроводах типа нанолент и нанотрубок из гексагонального нитрида бора и получены описывающие их выражения.

2. В рамках модели Лорда – Шульмана показано, что в случае малого коэффициента термоупругого взаимодействия в указанных выше наномасштабных теплопроводах могут независимо друг от друга возбуждаться как упругие, так и температурные бегущие и стоячие волны.

3. Проведены численные оценки характеристик температурных волн в h-BN нанотеплопроводах длиной 1 мкм виде наноленты с краями типа «зигзаг» шириной 1,31 нм и нанотрубки с торцами типа «кресло» диаметром 2,62 нм. Показано, что на частоте колебаний 111 ГГц скорость их распространения составляет 292 м/с, а временной коэффициент затухания $2,85 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Добротность n -полуволновых резонаторов из таких теплопроводов может достигать 119.

Список литературы

1. Okawa K., Amagai Y., Fudjiki H., Kaneko N.-H. Reverse heat flow with Peltier-induced thermoinductive effect // Communications Physics. 2021. № 4. P. 267–271. doi: 10.1038/s42005-021-00772-4
2. Landauer R. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices // The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics. 1970. Vol. 21, № 172. P. 863–867. doi: 10.1080/14786437008238472

3. Burke P. J. An RF circuit model for carbon nanotubes // *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2003. Vol. 2, № 1. P. 55–58. doi: 10.1109/TNANO.2003.808503
4. Rego L. C., Kirczenow C. Quantized thermal conductance of dielectric quantum wires // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 81, № 1. P. 232–235. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.232
5. Schwab K., Henriksen E. A., Worlock J. M., Roukes M. L. Measurement of the quantum of thermal conductance // *Nature*. 2000. Vol. 404. P. 974–977. doi: 10.1038/350010065
6. Yamamoto T., Watanabe S., Watanabe K. Universal features of quantized thermal conductance // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92. P. 075502. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.075502
7. Serrano J., Bosak A., Arenal R., Krisch M., Watanabe K., Taniguchi T., Kanda H., Rubio A., Wirtz L. Vibrational properties of hexagonal boron nitride: Inelastic X-ray scattering and ab initio calculations // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98, № 9. P. 095503. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.095503
8. Srivastava G. P. *The physics of phonons*. CRC Press LLC, 2022.
9. Srivastava G. P. The anharmonic phonon decay rate in group-III nitrides // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2009. Vol. 21. P. 174205. doi: 10.1088/0953-8984/21/17/174205
10. Gholivand H., Donmez N. Phonon mean free path in few layer grapheme, hexagonal boron nitride, and composite bilayer h-BN/grapheme // *IEEE Trans. Nanotechnology*. 2017. Vol. 16, № 5. P. 752–758. doi: 10.1109/TNANO.2017.2672199
11. Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. New method for high-accuracy determination of the free-structure constant based on quantized Hall effect // *Physical Review Letters*. 1980. Vol. 45, № 6. P. 494–497. doi: 10.1103/PhysRevLett.45.494
12. Jeong C., Datta S., Lundstrom M. Thermal conductivity of bulk and thin-film silicon: A Landauer approach // *Journal of Applied Physics*. 2012. Vol. 111, № 9. P. 093708. doi: 10.1063/1.4710993
13. Иродов И. Е. *Сборник задач по атомной и ядерной физике*. М. : Атомиздат, 1984. 216 с.
14. Lord H. W., Shulman Y. The generalized dynamical theory of thermoelasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967. Vol. 15. P. 299–309. doi: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
15. Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity // *J. Elasticity*. 1972. Vol. 2, № 1. P. 1–7. doi: 10.1007/BF00045689
16. Banerjee D. K., Pao Y. K. Thermoelastic waves in anisotropic media // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1974. Vol. 56, № 5. P. 1444–1454. doi: 10.21203/rs.3.rs-2696656/v1
17. Dhaliwal R. S., Sherief H. H. Generalized thermoelasticity for anisotropic media // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1980. Vol. 38, № 1. P. 1–8. doi: 10.1090/qam/575828
18. Verma K. L. Thermodynamic symmetric and antisymmetric wave modes with trigonometric functions in laminated plates // *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*. 2014. Vol. 1, № 4. P. 1–10. doi: 10.1186/s40712-014-0004-9
19. Wang X., Ouyang, Li X., Wang H., Guo J., Dai H. Room temperature all-semiconducting sub-10 nm grapheme nanoribbon field-effect transistor // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. P. 206803. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.206803
20. Pendry J. P. Negative refraction makes a perfect lens // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 85. P. 3966. doi: 10.1103/PhysRevLett.85.3966
21. Adams W., Sadatgol M., Zhang X., Guney D. O. Bringing the ‘perfect lens’ focus by near-perfect compensation of losses without gain media // *New Journal of Physics*. 2016. Vol. 18, № 12. P. 125004. doi: 10.1088/1367-2630/aa4f9e

References

1. Okawa K., Amagai Y., Fudjiki H., Kaneko N.-H. Reverse heat flow with Peltier-induced thermoinductive effect. *Communications Physics*. 2021;(4):267–271. doi: 10.1038/s42005-021-00772-4
2. Landauer R. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics*. 1970;21(172):863–867. doi: 10.1080/14786437008238472
3. Burke P.J. An RF circuit model for carbon nanotubes. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2003;2(1):55–58. doi: 10.1109/TNANO.2003.808503
4. Rego L.C., Kirczenow C. Quantized thermal conductance of dielectric quantum wires. *Physical Review Letters*. 1998;81(1):232–235. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.232
5. Schwab K., Henriksen E.A., Worlock J.M., Roukes M.L. Measurement of the quantum of thermal conductance. *Nature*. 2000; 404:974–977. doi: 10.1038/350010065
6. Yamamoto T., Watanabe S., Watanabe K. Universal features of quantized thermal conductance. *Physical Review Letters*. 2004;92:075502. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.075502
7. Serrano J., Bosak A., Arenal R., Krisch M., Watanabe K., Taniguchi T., Kanda H., Rubio A., Wirtz L. Vibrational properties of hexagonal boron nitride: Inelastic X-ray scattering and ab initio calculations. *Physical Review Letters*. 2007;98(9):095503. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.095503
8. Srivastava G.P. *The physics of phonons*. CRC Press LLC, 2022.
9. Srivastava G.P. The anharmonic phonon decay rate in group-III nitrides. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2009;21:174205. doi: 10.1088/0953-8984/21/17/174205
10. Gholivand H., Donmez N. Phonon mean free path in few layer grapheme, hexagonal boron nitride, and composite bilayer h-BN/grapheme. *IEEE Trans. Nanotechnology*. 2017;16(5):752–758. doi: 10.1109/TNANO.2017.2672199
11. Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. New method for high-accuracy determination of the free-structure constant based on quantized Hall effect. *Physical Review Letters*. 1980;45(6):494–497. doi: 10.1103/PhysRevLett.45.494
12. Jeong C., Datta S., Lundstrom M. Thermal conductivity of bulk and thin-film silicon: A Landauer approach. *Journal of Applied Physics*. 2012;111(9):093708. doi: 10.1063/1.4710993
13. Irodov I.E. *Sbornik zadach po atomnoy i yadernoy fizike = Collection of problems in atomic and nuclear physics*. Moscow: Atomizdat, 1984:216. (In Russ.)
14. Lord H.W., Shulman Y. The generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967;15:299–309. doi: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
15. Green A.E., Lindsay K.A. Thermoelasticity. *J. Elasticity*. 1972;2(1):1–7. doi: 10.1007/BF00045689
16. Banerjee D.K., Pao Y.K. Thermoelastic waves in anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1974;56(5):1444–1454. doi: 10.21203/rs.3.rs-2696656/v1
17. Dhaliwal R.S., Sherief H.H. Generalized thermoelasticity for anisotropic media. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1980;38(1):1–8. doi: 10.1090/qam/575828
18. Verma K.L. Thermodynamic symmetric and antisymmetric wave modes with trigonometric functions in laminated plates. *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*. 2014;1(4):1–10. doi: 10.1186/s40712-014-0004-9
19. Wang X., Ouyang, Li X., Wang H., Guo J., Dai H. Room temperature all-semiconducting sub-10 nm grapheme nanoribbon field-effect transistor. *Physical Review Letters*. 2008;100:206803. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.206803
20. Pendry J.P. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*. 2000;85:3966. doi: 10.1103/PhysRevLett.85.3966

21. Adams W., Sadatgol M., Zhang X., Guney D.O. Bringing the ‘perfect lens’ focus by near-perfect compensation of losses without gain media. *New Journal of Physics*. 2016;18(12):125004. doi: 10.1088/1367-2630/aa4f9e

Информация об авторах / Information about the authors

Рудольф Александрович Браже

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Ульяновский государственный
технический университет (Россия,
г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

E-mail: brazhe@ulstu.ru

Rudolf A. Brazhe

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the sub-
department of physics, Ulyanovsk State
Technical University (32 Severniy Venets
street, Ulyanovsk, Russia);

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 13.01.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 05.02.2024

Принята к публикации / Accepted 02.03.2024

УДК 620.3:537.633.9

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-13

Кванты коэффициентов Риги – Ледюка и магнитотеплового сопротивления

Р. А. Браже¹, А. А. Гришина²

^{1,2}Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

¹brazhe@ulstu.ru, ²a.grishina@ulstu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время хорошо известны эффекты размерного квантования в узких нанопроводниках (нанолентах и нанотрубках), вызывающие появление квантов электрического сопротивления, емкости и индуктивности. Не менее известны эффекты магнитного квантования, приводящие в двумерных проводниках к появлению квантов холловского сопротивления и магнитосопротивления. Целью данной работы является исследование влияния размерного и магнитного квантования на термомагнитные эффекты Риги – Ледюка и магнитотеплопроводности. *Материалы и методы.* Объектами исследования являются металлические графеновые наноленты шириной не менее 100 нм и длиной, не превышающей длину баллистического транспорта электронов (менее 1 мкм). В работе используются известные методы квантовой физики, кристаллофизики и квантовой теории явлений переноса в двумерном электронном газе. *Результаты.* Исследованы антисимметричные и симметричные части тензора удельных тепловых сопротивлений 2D-проводника в поперечном магнитном поле. Получены явные выражения для кванта удельного теплового сопротивления Риги – Ледюка и кванта коэффициента удельного абсолютного магнитотеплового сопротивления. Результаты исследования могут быть использованы при разработке термомагнитных датчиков, магнитотерморезисторов и других термомагнитных приборов. *Выводы.* Показано, что локализация электронов в узких графеновых нанолентах вследствие совместного размерного и магнитного квантования приводит к появлению квантового эффекта Риги – Ледюка и квантов коэффициентов Риги – Ледюка, удельного теплового сопротивления Риги – Ледюка и коэффициента удельного абсолютного магнитотеплового сопротивления.

Ключевые слова: графеновые наноленты, эффект Риги – Ледюка, магнитотепловое сопротивление, размерное квантование, магнитное квантование

Для цитирования: Браже Р. А., Гришина А. А. Кванты коэффициентов Риги – Ледюка и магнитотеплового сопротивления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 151–159. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-13

Quanta of the Righi – Leduc coefficients and magneto-thermal resistance

R.A. Brazhe¹, A.A. Grishina²

^{1,2}Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

¹brazhe@ulstu.ru, ²a.grishina@ulstu.ru

Abstract. *Background.* Currently, the effects of dimensional quantization in narrow nanoconductors (nanoribbons and nanotubes) are well known, causing the appearance of quanta of electrical resistance, electrical capacity and inductance. No less known are the effects of

magnetic quantization, which lead to the appearance of quantum Hall resistance and magnetoresistance in two-dimensional conductors. The purpose of the work is to study the effect of dimensional and magnetic quantization on the thermomagnetic effects of Righi – Leduc and magnetothermal conductivity. *Materials and methods.* The objects of the study are metallic graphene nanoribbons with a width of less than 100 nm and a length not exceeding the length of ballistic electron transport (less than 1 μm). The work uses well-known methods of quantum physics, crystallophysics and the quantum theory of transport phenomena in two-dimensional electron gas. *Results.* The symmetric and antisymmetric parts of the specific thermal resistance tensor of a 2D conductor in a transvers magnetic field are investigated. Explicit expressions are obtained for the Righi – Leduc quantum of specific thermal resistance and quantum of specific absolute magnetothermal resistance. The results of the work can be used in the development of thermomagnetic sensors, magnetothermistors and other thermomagnetic devices. *Conclusions.* It is shown that the localization of electrons in narrow graphene nanoribbons due to joint dimensional and magnetic quantization leads to the appearance of the quantum Righi – Leduc effect and the quanta of the Righi – Leduc coefficients, the specific thermal resistance of Righi – Leduc and the coefficient of specific absolute magnetothermal resistance.

Keywords: graphene nanoribbons, Righi – Leduc effect, magnetothermal resistance, dimensional quantization, magnetic quantization

For citation: Brazhe R.A., Grishina A.A. Quanta of the Righi – Leduc coefficients and magneto-thermal resistance. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):151–159. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-13

Введение

Как было показано нами ранее [1–3], в 2D-нанопроводниках, поперечные размеры которых соизмеримы с длиной электронной волны де Бройля, размерное квантование приводит к квантованию коэффициентов диффузии, вязкости, электро- и теплопроводности, коэффициентов Зеебека, Пельтье и Томсона. Если, кроме того, проводники находятся в поперечном магнитном поле, то появляется дополнительно магнитное квантование, обусловленное квантованием циклотронных орбит электронов и появлением в их энергетическом спектре уровней Ландау. В результате возникает квантование коэффициентов Холла, холловского сопротивления и магнитосопротивления [4].

Развитием названных работ является исследование ожидаемого квантования кинетических коэффициентов, описывающих термомагнитные явления переноса: эффектов Риги – Ледюка и магнитотеплового сопротивления при их наблюдении в электропроводящих узких нанолентах.

Открытый еще в 1887 г. А. Риги (Италия) и С. Ледюком (Франция) эффект состоит в том, что при помещении проводника с продольным градиентом температур в поперечное магнитное поле в нем возникает вторичная разность температур, перпендикулярная исходному тепловому потоку и магнитному полю. Указанная разность температур пропорциональна первой степени индукции приложенного магнитного поля. Магнитотеплосопротивление – другой магнитотермический эффект, состоящий в появлении как поперечного, так и продольного магнитотеплового сопротивления в проводнике, пропорционального квадрату индукции поперечного магнитного поля.

Несмотря на то, что магнитотермические явления, в том числе эффект Риги – Ледюка в низкоразмерных системах, в настоящее время интенсивно

исследуются [5–7], авторам неизвестны публикации, в которых бы говорилось о квантовании соответствующих кинетических коэффициентов. В связи с этим наше исследование представляется актуальным как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

Основной целью статьи является исследование влияния размерного и магнитного квантования на протекание термомагнитных явлений в узких электропроводящих графеновых нанолентах в условиях баллистического транспорта электронов, когда их рассеяние на фононах отсутствует. Конечной целью работы является вывод явных выражений для квантов коэффициентов Риги – Ледюка и магнитотеплового сопротивления.

Материалы и методы

Объектами исследования являются графеновые наноленты (ГНЛ) с краями типа «зигзаг» и длиной, не превышающей их баллистической длины: $L \leq L_b$ (для графена $L_b \approx 1$ мкм). Ширина наноленты $W \leq 100$ нм выбирается из соображений обеспечения выполнения условий размерного квантования электронных состояний в образце.

В работе использовались известные методы квантовой физики, кристаллофизики (в частности, тензорного описания явлений переноса) и основные понятия физики двумерного электронного газа.

Результаты

Общий вид уравнения для тензора удельного теплового сопротивления

Уравнение для тензора 2-го ранга удельного теплового сопротивления $\rho_{ij}^{(\theta)}(\vec{B})$ в поперечном магнитном поле с индукцией \vec{B} запишем в виде [8, 9]

$$\rho_{ij}^{(\theta)}(\vec{B}) = \rho_{ij}^{(\theta,0)} + \rho_{ijk}^{(\theta)} B_k + \rho_{ijkl}^{(\theta)} B_k B_l. \quad (1)$$

Антисимметричная часть тензора (1) описывает эффект Риги – Ледюка (тепловой аналог эффекта Холла):

$$\rho_{ij}^{(\theta)}(\vec{B}) = \rho_{ijk}^{(\theta)} B_k, \quad (2)$$

а симметричная часть – эффект магнитотеплового сопротивления:

$$\rho_{ij}^{(\theta)}(\vec{B}) = \rho_{ij}^{(\theta,0)} + \rho_{ijkl}^{(\theta)} B_k B_l. \quad (3)$$

В выражении (3) $\rho_{ij}^{(\theta,0)}$ представляет собой обычное удельное тепловое сопротивление материала без влияния магнитного поля, а $\rho_{ijkl}^{(\theta)}$ – удельное магнитотепловое сопротивление.

На рис. 1 представлено расположение исследуемой ГНЛ относительно кристаллофизических осей x_1, x_2, x_3 , ориентация магнитного поля и исходного градиента температуры, задающего тепловой поток.

Физика процесса состоит в том, что электроны от горячего конца ГНЛ начинают двигаться к более холодному, а электроны от холодного конца

к более нагретому. «Горячие» электроны переносят бóльшую энергию, в результате чего дают бóльший вклад в образующуюся поперечную разность температур и определяют направление и величину вторичного градиента температуры.

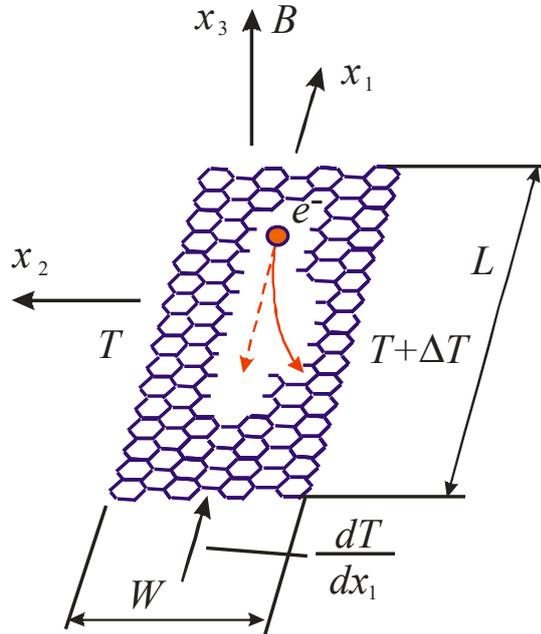


Рис. 1. Ориентация ГНЛ, магнитного поля и исходного градиента температуры (стрелкой показано направление бокового отклонения «горячих» электронов)

Эффект Риги – Ледюка

Коэффициент Риги – Ледюка $\rho_{ijk}^{(\theta)}$ в выражении (2) измеряется в следующих единицах СИ: $[\rho_{ijk}^{(\theta)}] = 1 \text{ К} \cdot 1 \text{ Тл}^{-1} \cdot \text{Вт}^{-1}$ и для графена характеризуется единственным отличным от нуля компонентом тензора $\rho_{123}^{(\theta)}$:

$$\rho_{123}^{(\theta)} = \begin{pmatrix} \rho_{113} & \rho_{123} \\ \rho_{213} & \rho_{223} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{123} \\ -\rho_{123} & 0 \end{pmatrix}_1.$$

В условиях размерного квантования ширина ГНЛ $W = \pi / k_F$, где k_F – волновое число Ферми [1]. Тогда $\rho_{123}^{(\theta)} = A_{RL} / \kappa_2$, $A_{RL} = \sigma^2 R_H$, где A_{RL} – коэффициент Риги – Ледюка; σ_2 и κ_2 – соответственно коэффициенты двумерной электро- и теплопроводности. Ввиду того, что в бесстолкновительном режиме электронного транспорта фоновой теплопроводностью можно пренебречь, а закон Видемана – Франца принимает вид [1]:

$$\frac{\kappa_2}{\sigma_2} = \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T,$$

$$\rho_{123}^{(\theta)} = \frac{e^2}{k_B^2 T} R_H = \frac{e^2}{k_B^2 T} \frac{1}{n_2 e} = \frac{e^2}{k_B^2 T} \rho_{123}, \quad (4)$$

где

$$\rho_{123} = \frac{hL}{2em^* v_F N}$$

обозначает коэффициент Холла [4]; k_B – постоянная Больцмана; e – элементарный заряд; T – абсолютная температура образца; n_2 – двумерная концентрация электронов; h – постоянная Планка; L – длина образца; m^* – эффективная масса электрона; v_F – его скорость Ферми; N – число электронов в ГНЛ указанных размеров.

В расчете на один канал электропроводности для $N=1$ на единицу длины из (4) получаем *квант погонного значения коэффициента Риги – Ледюка*:

$$\rho_{20}^{(\theta)} = \frac{e^2}{k_B^2 T} \rho_{20}, \quad (5)$$

где $\rho_{20} = h / (2em^* v_F)$ – квант погонного значения коэффициента Холла [4].

Запишем теперь выражение для поперечной разности температур в эффекте Риги – Ледюка в форме, по структуре сходной с формулой для холловского напряжения:

$$\Delta T = A_{RL} \frac{dT}{dx_1} BW = \frac{A_{RL}}{x_2} j_Q BW, \quad (6)$$

где $j_Q = dQ / (Wdt)$ – плотность теплового потока.

Тогда удельное тепловое сопротивление 2D-электронного газа в магнитном поле (удельное тепловое сопротивление Риги – Ледюка) согласно (4) будет

$$\rho_{RL}^{(\theta)} = \rho_{123}^{(\theta)} B = \frac{e^2}{k_B^2 T} \frac{B}{n_2 e} = \frac{h}{k_B^2 T} \frac{eB}{n_2 h} = \frac{1}{v} \frac{h}{k_B^2 T} = \frac{R_{oe}^\theta}{v}, \quad (7)$$

где

$$R_{oe}^{(\theta)} = \frac{h}{k_B^2 T} - \quad (8)$$

квант удельного теплового сопротивления электронного газа, аналогичный сопротивлению фон Клитцинга $R_K = h / e^2 \approx 25,8128$ кОм для квантового эффекта Холла, а $v = n_2 h / (eB)$ – фактор заполнения уровней Ландау электронами. При $T = 300$ К $R_{oe}^{(\theta)} = 1,18 \cdot 10^{10}$ К / Вт.

Если в наноленте укладывается $M(E_F) = g_s g_v W k_F / \pi$ анналов электропроводности (g_s и g_v – соответственно спиновое и доменное вырождения электронных состояний, причем для графена $g_s = g_v = 2$), то выражения (5) для погонного значения коэффициента Риги – Ледюка и (7) для удельного теплового сопротивления Риги – Ледюка принимают вид

$$\rho_{20}^{(\theta)} = \frac{e^2}{k^2 T} \frac{\rho_{20}}{M(E_F)}, \quad (9)$$

$$\rho_{RL}^{(\theta)} = \frac{R_{oe}^{(\theta)}}{M(E_F) v}. \quad (10)$$

Заметим, что формулы (5)–(10) описывают тепловые аналоги для соответствующих по смыслу выражений из квантового эффекта Холла [4].

Эффект магнитотеплосопротивления

Вернемся теперь к формуле (3) и запишем ее в виде

$$\Delta \rho_{ij}^{(\theta)} = \rho_{ij}^{(\theta)}(\vec{B}) - \rho_{ij}^{(\theta,0)} = \rho_{ijkl}^{(\theta)} B_k B_l, \quad (11)$$

где $\Delta \rho_{ij}^{(\theta)}$ – абсолютное удельное магнитотеплосопротивление. Относительное удельное магнитотеплосопротивление, как следует из (11):

$$\frac{\Delta \rho_{ij}^{(\theta)}}{\rho_{ij}^{(\theta,0)}} = \frac{\rho_{ijkl}^{(\theta)}}{\rho_{ij}^{(\theta,0)}} B_k B_l = K_{mn} B_k B_l, \quad (12)$$

где K_{mn} – независящий от магнитного поля универсальный тензор коэффициентов относительного сопротивления [4], представимый для графена в виде матрицы

$$(K_{mn}) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{11} & K_{13} \\ K_{13} & K_{13} & K_{33} \end{pmatrix}_4.$$

В рамках геометрии, показанной на рис. 1, из (12) получаются следующие выражения для продольного и поперечного относительных магнитотеплосопротивлений:

$$\frac{\Delta \rho_{\parallel}^{(\theta)}}{\rho_{\parallel}^{(\theta,0)}} = \frac{\Delta \rho_{\perp}^{(\theta)}}{\rho_{\perp}^{(\theta,0)}} = K B^2, \quad (13)$$

так как в этом случае $K_{23} = K_{13} = K$. В работе [10] показано, что коэффициент K зависит лишь от подвижности μ носителей заряда и отношения длины ГНЛ к ее ширине L/W :

$$K = g\left(\frac{L}{W}\right)\mu^2,$$

где $g(L/W)$ – безразмерная функция (см. [4]).

Из (13) следует, что

$$\Delta\rho_{\parallel}^{(\theta)} = \rho_1^{(\theta,0)}KB^2, \quad \Delta\rho_{\perp} = \rho_2^{(\theta,0)}KB^2, \quad (14)$$

где $\rho_1^{(\theta,0)}K$ и $\rho_2^{(\theta,0)}K$ – коэффициенты соответствующих продольных и поперечных магнитотеплосопровитлений. Так как и $\rho_1^{(\theta,0)}$ и $\rho_2^{(\theta,0)}$ в (14) кратны $R_{oe}^{(\theta)}$, то *квант коэффициента удельного абсолютного магнитотеплосопровитления* определяется выражением

$$(\rho_{13})_0 = (\rho_{23})_0 = R_{oe}^{(\theta)}K \quad (15)$$

и измеряется в $K / (\text{Вт} \cdot \text{Тл}^2)$.

Обсуждение

Итак, в тепловом аналоге квантового эффекта Холла – эффекте Риги – Ледюка – также имеют место кванты кинетических коэффициентов, обусловленные размерным и магнитным квантованием электронных состояний. В частности, квант погонного значения коэффициента Риги – Ледюка описывается формулой (5), а квант удельного магнитотеплосопровитления – формулой (7).

Для температуры $T = 300$ К расчеты по формуле (5) дают для кванта погонного значения коэффициента Риги – Ледюка в графене значение $\rho_{20}^{(\theta)} = 4,30 \cdot 10^{10} \text{ К} / (\text{м} \cdot \text{Вт} \cdot \text{Тл})$, а для кванта удельного теплового сопротивления Риги – Ледюка согласно (7) значение $\rho_{RL}^{(\theta)} = R_{oe}^{(\theta)} / \nu$, где $R_{oe}^{(\theta)} = 1,18 \cdot 10^{10} \text{ К} / \text{Вт}$ – квант удельного теплового сопротивления при температуре $T = 300$ К; ν – фактор заполнения уровней Ландау в магнитном поле.

Как показано в [4], в случае ГНЛ с $L \sim 1 \text{ мкм}$ и $W \sim 0,1 \text{ мкм}$ $K = 33,8 \text{ Тл}^{-2}$, и квант коэффициента удельного абсолютного магнитотеплосопровитления, как следует из (15), $(\rho_{13})_0 = (\rho_{23})_0 = 3,99 \cdot 10^{11} \text{ К} / (\text{Вт} \cdot \text{Тл}^2)$.

Заключение

Показано, что локализация электронов в графеноподобных электропроводящих нанолентах вследствие размерного и магнитного квантования в поперечном магнитном поле приводит к появлению квантов коэффициентов Риги – Ледюка, квантов удельного теплового сопротивления Риги – Ледюка и кванта коэффициента удельного магнитотеплосопровитления.

Полученные в работе формулы позволяют рассчитывать значения этих коэффициентов для электропроводящих нанолент, если известны их симметрия и физические характеристики.

В случае полупроводниковых нанолент, естественно, нужно учитывать вклад числа электропроводящих каналов как для электронов, так и для дырок, что приводит к увеличению разности температур Риги – Ледюка за счет уменьшения удельного теплового сопротивления и соответствующего усиления плотности теплового потока.

Результаты работы могут быть использованы для создания термомагнитных датчиков, магнитотерморезисторов и других термомагнитных приборов.

Список литературы

1. Браже Р. А., Фуфаев И. В. Размерное квантование кинетических коэффициентов, описывающих явления переноса в графеноподобных нанолентах // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, № 2. С. 90–97.
2. Браже Р. А., Лебедев Е. Ю., Фуфаев И. В. Недиссипативные необратимые процессы в наномасштабных линиях передачи // Необратимые процессы в природе и технике : материалы Всерос. конф. НПPT-2023 (Москва, 31.01–03.02.2023). М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2023.
3. Браже Р. А., Гришина А. А. Кванты коэффициентов Зеебека, Пельтье и Томсона в наномасштабных проводниках // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 59–67. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-6
4. Браже Р. А., Гришина А. А. Кванты коэффициентов Холла и магнитосопротивления в электропроводящих нанолентах // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 90–98.
5. Ma R., Sheng L. Magnetothermoelectric transport properties in grapheme superlattices with one-dimensional periodic potentials // EPL. 2015. Vol. 109, № 1. P. 17004. doi: org/10.1209/0295-5075/109/17004
6. Kundu A., Alrefae M. A., Fisher T. S. Magnetothermoelectric effectiv's in graphene and their dependence on scatteren concentration, magnetic field, and band gap // Journal of Applied Physics. 2017. Vol. 121, № 10. P. 125113. doi: 10.1063/1.4979051
7. Figarova S. R., Huseynov H. I., Figarov V. R. Magneto thermoelectric properties of layered structures for ion impurity scattering // Superlattices and microstructures. 2018. Vol. 117. P. 469–475. doi: 10.1016/j.spmi.2018.03.074
8. Шувалов Л. А., Урусовская А. А., Желудев И. С. [и др.]. Современная кристаллография. Т 4. Физические свойства кристаллов. М. : Наука, 1981. 496 с.
9. Гришина А. А. Математические модели явлений переноса в инверсных средах : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18. Ульяновск, 2009. 139 с.
10. Vorob'ev V. N., Sokolov Yu. F. Determination of the mobility in small sample of gallium arsenide from magnetoresistive effects // Sov. Phys. Semiconductors. 1971. Vol. 5. P. 616.

References

1. Brazhe R.A., Fufaev I.V. Size quantization of kinetic coefficients describing transport phenomena in graphene-like nanoribbons. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh = Physical education in universities*. 2021;27(2):90–97. (In Russ.)
2. Brazhe R.A., Lebedev E.Yu., Fufaev I.V. Non-dissipative irreversible processes in nanoscale transmission lines. *Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike: materialy Vseros. konf. NPPT-2023 (Moskva, 31.01–03.02.2023) = Irreversible processes in nature*

- and technology: proceedings of the All-Russian conference (Moscow, January 31 – February 3, 2023). Moscow: MGTU im. N.E. Bauman, 2023. (In Russ.)
3. Brazhe R.A., Grishina A.A. Seebeck, Peltier and Thomson coefficient quanta in nanoscale conductors. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(2):59–67. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-6
 4. Brazhe R.A., Grishina A.A. Quanta of Hall coefficients and magnetoresistance in electrically conductive nanoribbons. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(4):90–98. (In Russ.)
 5. Ma R., Sheng L. Magnetothermoelectric transport properties in grapheme superlattices with one-dimensional periodic potentials. *EPL.* 2015;109(1):17004. doi: org/10.1209/0295-5075/109/17004
 6. Kundu A., Alrefae M.A., Fisher T.S. Magnetothermoelectric effectiv's in graphene and their dependence on scatteren concentration, magnetic field, and band gap. *Journal of Applied Physics.* 2017;121(10):125113. doi: 10.1063/1.4979051
 7. Figarova S.R., Huseynov H.I., Figarov V.R. Magneto thermoelectric properties of layered structures for ion impurity scattering. *Superlattices and microstructures.* 2018;117:469–475. doi: 10.1016/j.spmi.2018.03.074
 8. Shuvalov L.A., Urusovskaya A.A., Zheludev I.S. et al. *Sovremennaya kristallografiya. T 4. Fizicheskie svoystva kristallov = Modern crystallography. Volume 4. Physical properties of crystals.* Moscow: Nauka, 1981:496. (In Russ.)
 9. Grishina A.A. *Mathematical models of transport phenomena in inverse media.* PhD dissertation: 05.13.18. Ulyanovsk, 2009:139. (In Russ.)
 10. Vorob'ev V.N., Sokolov Yu.F. Determination of the mobility in small sample of gallium arsenide from magnetoresistive effects. *Sov. Phys. Semiconductors.* 1971;5:616.

Информация об авторах / Information about the authors

Рудольф Александрович Бразже

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Ульяновский государственный
технический университет (Россия,
г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

E-mail: brazhe@ulstu.ru

Rudolf A. Brazhe

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the sub-
department of physics, Ulyanovsk State
Technical University (32 Severniy Venets
street, Ulyanovsk, Russia)

Алена Александровна Гришина

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры физики,
Ульяновский государственный
технический университет
(Россия, г. Ульяновск,
ул. Северный Венец, 32)

E-mail: a.grishina@ulstu.ru

Alena A. Grishina

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department of physics,
Ulyanovsk State Technical University
(32 Severniy Venets street,
Ulyanovsk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 13.01.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 05.02.2024

Принята к публикации / Accepted 02.03.2024

УДК 534.2, 534-13, 51-72
doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-14

Точные сингулярные решения уравнений Хохлова – Заболотской и квазилинейные уравнения первого порядка

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический университет, Ульяновск, Россия
zhvictorm@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Уравнение Хохлова – Заболотской является одним из важных инструментов анализа распространения звуковых волн в газообразной среде и жидкостях, а также в задачах обтекания профилей сжимаемой жидкостью. Нелинейность этого уравнения требует специальных методов построения решений и их анализа. Целью работы является построение точных решений уравнения Хохлова – Заболотской с помощью связывания их в трехмерном пространстве квазилинейными уравнениями первого порядка. Такой подход дает важную информацию о характере решений уравнения Хохлова – Заболотской и его обобщений. *Материалы и методы.* В данной работе решения уравнения Хохлова – Заболотской строятся с помощью метода ривертонов (решений систем квазилинейных уравнений первого порядка специального типа). Описывается общая процедура вывода уравнения Хохлова – Заболотской из системы квазилинейных уравнений первого порядка. *Результаты.* Основным результатом является построение в неявном виде множества точных решений уравнения Хохлова – Заболотской, зависящих от трех функциональных параметров. Это позволяет строить решения при заданных условиях вдоль координатных осей. Представлен общий способ анализа таких решений с указанием базовых кривых, вдоль которых движутся плоские волновые фронты решений, а также областей, в которых число листов многозначных решений фиксировано. *Выводы.* Предложенный метод построения решений позволяет строить точные решения уравнения Хохлова – Заболотской, соответствующие заданным условиям вдоль координатных осей и анализировать их геометрические свойства.

Ключевые слова: уравнение Хохлова – Заболотской, обобщенные уравнения Хохлова – Заболотской, ривертоны, квазилинейные уравнения первого порядка

Финансирование: работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2024-060/1 от 13.02.2024 к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2024-060 от 18.01.2024, заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Для цитирования: Журавлев В. М. Точные сингулярные решения уравнений Хохлова – Заболотской и квазилинейные уравнения первого порядка // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 160–174. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-14

The exact singular solutions of the Khokhlov – Zabolotskaya equations and first-order quasilinear equations

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia
zhvictorm@gmail.com

© Журавлев В. М., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstract. *Background.* The Khokhlov – Zabolotskaya equations are one of the important tools for analyzing the propagation of sound waves in a gaseous medium and liquids, as well as in problems of compressible fluid flow around profiles. The nonlinearity of these equations requires special methods for constructing solutions and analyzing them. The purpose of the work is to construct exact solutions of the Khokhlov – Zabolotskaya equations by connecting them with first-order quasilinear equations, as well as to analyze the geometry of these solutions in three-dimensional space. *Materials and methods.* In this work, solutions to the Khokhlov – Zabolotskaya equations are constructed using the riverton method (solutions to systems of first-order quasi-linear equations of a special type). The general procedure for deriving the Khokhlov – Zabolotskaya equations from a system of first-order quasilinear equations is described. *Results.* The main result is the implicit construction of a set of exact solutions to the Khokhlov – Zabolotskaya equation, depending on three functional parameters. This allows you to construct solutions under given conditions along the coordinate axes. A general method for analyzing such solutions is presented, indicating the base curves along which the plane wave fronts of the solutions move, as well as the regions in which the number of sheets of multivalued solutions is fixed. *Conclusions.* The proposed method for constructing solutions allows one to construct exact solutions of the Khokhlov – Zabolotskaya equation that correspond to given conditions along the coordinate axes and analyze their geometric properties.

Keywords: Khokhlov–Zabolotskaya equation, generalized Khokhlov – Zabolotskaya equations, rivertons, first-order quasilinear equations

Financing: the work was carried out within the framework of Additional Agreement No. 073-03-2024-060/1 dated February 13, 2024 to the Agreement on the provision of subsidies from the federal budget for financial support for the implementation of the state task for the provision of public services (performance of work) No. 073-03-2024-060 dated January 18, 2024, concluded between the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “UISPU im. I.N. Ulyanov” and the Ministry of Education of the Russian Federation.

For citation: Zhuravlev V.M. The exact singular solutions of the Khokhlov – Zabolotskaya equations and first-order quasilinear equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(1):160–174. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-14

Введение

Уравнение Хохлова – Заболотской (ХЗ) описывает распространение акустических волн в виде пучков и играет важную роль в нелинейной акустике [1–6]. Это же уравнение возникает и в гидродинамике при описании обтекания тонких профилей сжимаемым газом [4, 7].

Обобщенные уравнения Хохлова – Заболотской (ОХЗ) [1, 4, 5] можно записать в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} - F(p) \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \Delta_{\perp} p, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

здесь $p(x, y, z, t)$ – безразмерное акустическое давление в точке x, y, z в пучке в момент времени t ; $F(p)$ – функция, характеризующая нелинейные свойства среды. Акустический пучок направлен вдоль оси x , а координаты y, z лежат в плоскости, перпендикулярной оси пучка. В классическом виде уравнению ХЗ соответствует функции $F(p) = p$. В статье [4] указывалось на

возможность обобщения классического уравнения до уравнения (1) с произвольной функцией $F(p)$, которые могут возникать в различных прикладных задачах. Еще одним обобщением уравнения (1) является уравнение Хохлова – Заболотской – Кузнецова [4, 8], учитывающее диссипативные эффекты в вязкой жидкости.

В связи с множеством приложений, в которых уравнение ХЗ появляется, это уравнение исследовалось достаточно подробно [1–6]. Вместе с тем ряд свойств уравнений (1) остается недостаточно изученным. Например, как указывалось в [4], эти уравнения могут рассматриваться как обобщения квазилинейных уравнений первого порядка типа простой волны, но прямой связи между этими уравнениями и (1) указано не было. В работах [9–14] был предложен метод построения волновых уравнений достаточно общего вида – на основе установления их связи с квазилинейными уравнениями первого порядка (КЛУ1). Решения волновых уравнений второго порядка, являющиеся одновременно и решениями КЛУ1, в этих работах были названы для краткости ривертонами. Как оказывается, этот подход может быть распространен и на уравнения ОХЗ.

Целью данной работы является задача установления связи между ОХЗ и КЛУ1 и получение общего алгоритма для вычисления точных решений этих уравнений, опирающегося на метод ривертон.

1. Многомерные автономные квазилинейные уравнения первого порядка

Рассмотрим системы квазилинейных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = A_0(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z^\alpha} = A_\alpha(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2, \quad z^1 = y, \quad z^2 = z. \quad (2)$$

Решение этой системы уравнений находится с помощью метода характеристик [9]. Общий вид решений, которые будем далее называть ривертонами, можно представить в следующей форме:

$$H(\phi, \xi) = 0, \quad (3)$$

где $H(\phi, \xi)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Введены обозначения:

$$\xi = t + A_0(\phi)x + A_1(\phi)y + A_2(\phi)z. \quad (4)$$

Соотношение (3) является неявным заданием решений уравнений (2) относительно функции $\phi(x, y, z, t)$. Поскольку функция $H(\phi, \xi)$ зависит только от одной переменной ξ , содержащей координаты и время, то такие решения будем называть однопараметрическими.

Основной смысл для рассматривания таких систем уравнений состоит в том, что решения (2) являются также и решениями некоторых автономных нелинейных уравнений второго порядка [9, 12, 13]. Дифференцируя уравнения (2) с производными по y, z , по соответствующим переменным и складывая результаты, приходим к следующему уравнению:

$$\Delta_{\perp}\phi = \sum_{\alpha=1,2} \left(A_{\alpha}(\phi) \frac{\partial}{\partial t} \phi_{,\alpha} + A_{\alpha}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_{,\alpha} \right), \quad \phi_{,\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial z^{\alpha}}.$$

Заменяя в этом уравнении $\phi_{,\alpha}$ с помощью соотношений (2), приходим к уравнению

$$\Delta_{\perp}\phi = \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 \phi_t), \quad |A|^2 = A_1^2(\phi) + A_2^2(\phi). \quad (5)$$

Заметим, что в последнее уравнение производные по x не входят, но производная ϕ_t при этом связана с производной ϕ_x с помощью первого уравнения (2). Это важно для дальнейших построений.

2. Переход к уравнениям Хохлова – Заболотской

Уравнение (5) можно привести к стандартному виду обобщенного уравнения ОХЗ, используя первое уравнение системы (2). Воспользуемся для этого простым тождеством:

$$|A|^2 \phi_t = (|A(\phi)|^2 - A_0(\phi))\phi_t + A_0(\phi)\phi_t = (|A|^2 - A_0(\phi))\phi_t + \phi_x. \quad (6)$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (5), приходим к уравнению ОХЗ в следующем виде:

$$\Delta_{\perp}\phi = \frac{\partial}{\partial t} \left((|A|^2 - A_0)\phi_t + \phi_x \right). \quad (7)$$

Это уравнение совпадает с (1) в случае простого равенства:

$$F = A_0(\phi) - |A(\phi)|^2 = A_0(\phi) - A_1^2(\phi) - A_2^2(\phi). \quad (8)$$

Таким образом, для заданной функции $F(\phi)$ существует множество решений уравнения (1), соответствующих произвольному выбору функций $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$. При этом вид функции $A_0(\phi)$ определяется соотношением

$$A_0 = F(\phi) + |A(\phi)|^2 = F(\phi) + A_1^2(\phi) + A_2^2(\phi). \quad (9)$$

Соответствующие неявные решения (3)–(4) без ограничения общности можно записать в таком виде:

$$\phi = h(\xi), \quad \xi = t + (F(\phi) + |A(\phi)|^2)x + A_1(\phi)y + A_2(\phi)z, \quad (10)$$

где $h(\xi)$ – дифференцируемая функция, определяющаяся начальными и граничными условиями задачи.

3. Общие свойства решений

Основным свойством ривертонов является то, что их фронты представляют собой плоскости в трехмерном пространстве. Этот факт следует из общей формы системы квазилинейных уравнений первого порядка (2). Фронт волны можно определить как изоповерхность функции $\phi(x, y, z, t)$ в про-

пространстве в конкретный момент времени t . Обозначим через ϕ_0 значение функции $\phi(x, y, z, t)$ на фронте волны. Тогда форма фронта определяется уравнением

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_0 = \text{const.}$$

Исходя из формы уравнений (2), сразу находим, что вектор $N = (A_0(\phi), A_1(\phi), A_2(\phi))$ обладает следующими свойствами. Во-первых, этот вектор всюду ортогонален фронту, поскольку он коллинеарен градиенту функции ϕ :

$$A = \frac{1}{\phi_t} \nabla \phi.$$

Во-вторых, поскольку этот вектор зависит только от функции ϕ , то он имеет одинаковое направление вдоль всего фронта. Отсюда можно сделать вывод, что фронт $\phi = \phi_0$ волны представляет собой плоскость в трехмерном пространстве с направляющим вектором $N_0 = (A_0(\phi_0), A_1(\phi_0), A_2(\phi_0))$. Вместе с тем направляющий вектор плоскости фронта волны зависит от ϕ_0 и меняется в пространстве и времени. При этом плоскости фронтов для различных значений ϕ_0 могут пересекаться. Это означает, что решения (10) становятся многозначными, это также следует из общего вида неявного решения (10). Поскольку положение плоскости фронта определяется только одним параметром – значением ϕ на фронте, то каждое общее решение (10) определяется одной базовой кривой в трехмерном пространстве, к которой фронты будут ортогональны. Следуя [9], приведем основные элементы вычисления структуры областей однозначности и многозначности решений.

Введем обозначения:

$$R = |A|, \quad |A|^2 = \sum_{\alpha=0}^2 (A_\alpha(\phi))^2. \quad (11)$$

Для описания геометрической структуры ривертонов введем параметр s вдоль кривой, пользуясь следующим определением:

$$s = \sum_{\alpha=0}^2 n_\alpha(\phi) x_\alpha,$$

где $n_\alpha(\phi) = A_\alpha(\phi) / R(\phi)$ – компоненты единичного векторного поля $n(\phi)$ всюду коллинеарного A .

Тогда (10) можно записать в следующем виде:

$$t + R(\phi)s = g(\phi), \quad (12)$$

где $g(\phi)$ – функция, обратная к $h(\xi)$. Сворачивая (2) с компонентами поля $n(\phi)$, эти уравнения можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=0}^2 n_{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} = R(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Это квазилинейное уравнение имеет характеристики, которые вычисляются из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\alpha}}{ds} &= n_{\alpha}(\phi), \quad \alpha = 0, \dots, 2, \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} &= R(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее уравнение имеет общим решением соотношение (12).

Первая часть этой системы определяет кривую в пространстве, вдоль которой распространяется волна и к которой ее фронт всюду ортогонален 1. Эта кривая и называется базовой (рис. 1).

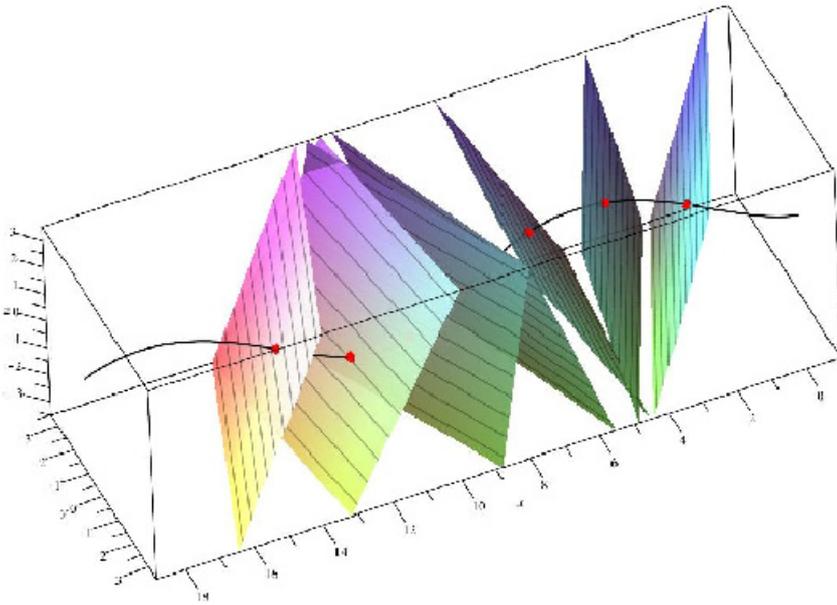


Рис. 1. Пример базовой кривой и положение плоских фронтов вдоль нее

Для того чтобы связать базовую кривую с начальными условиями, удобно перейти от параметра s к значениям самой функции ϕ , которые также параметризуют точки базовой кривой. Из (12) для каждого фиксированного значения t имеем

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{R(\phi)g'(\phi) - R'(\phi)(g(\phi) - t)}{R(\phi)}. \quad (14)$$

В результате уравнения кривой примут такой вид:

$$\frac{dx_{\alpha}}{d\phi} = A_{\alpha}(\phi) \frac{g'(\phi)R(\phi) - (g(\phi) - t)R'(\phi)}{R^3(\phi)}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Интегрируя это уравнение, приходим к соотношениям, определяющим явный вид точек кривой в заданный момент времени t :

$$x_\alpha = S_\alpha(\phi) + tV_\alpha(\phi) + x_\alpha^{(0)}, \quad (16)$$

где $x_\alpha^{(0)}$ – постоянные интегрирования и введены обозначения:

$$S_\alpha(\phi) = \int A_\alpha(\phi) \frac{g'(\phi)R(\phi) - g(\phi)R'(\phi)}{R^3(\phi)} d\phi, \quad V_\alpha(\phi) = \int A_\alpha(\phi) \frac{R'(\phi)}{R^3(\phi)} d\phi,$$

Эти соотношения определяют в каждый момент времени геометрическую структуру базовой кривой исходя из функциональной формы компонентов поля $A(\phi)$ и функции $g(\phi)$ (или $h(\xi)$), которые связаны с начальными условиями. Отсюда, в частности, следует, что базовая кривая не меняет своей формы со временем, если только $R'(\phi) = 0$. В противном случае со временем базовая кривая меняется в соответствии с (16).

Установим, какая информация требуется для того, чтобы определить геометрическую структуру ривертона, исходя из начальных и граничных условий. Введем обозначения:

$$\Phi_0(x) = \phi(x, 0, 0, 0), \quad \Phi_1(y) = \phi(0, y, 0, 0), \quad \Phi_2(z) = \phi(0, 0, z, 0). \quad (17)$$

Функции $\Phi_\alpha(r)$ – функции одного аргумента r , которые представляют собой изменение $\phi(x, t)$ вдоль координатной прямой с индексом α . Обращая функции (17), получаем параметризацию значений координат через значения функции ϕ на данной оси в нулевой момент времени:

$$x = X(\phi), \quad y = Y(\phi), \quad z = Z(\phi),$$

где $X(\phi)$, $Y(\phi)$, $Z(\phi)$ – функции, обратные функциям $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(z)$ соответственно. Тогда уравнение (10) на осях координат при $t = 0$ принимает такой вид:

$$A_0(\phi) = \frac{g(\phi)}{X(\phi)}, \quad A_1(\phi) = \frac{g(\phi)}{Y(\phi)}, \quad A_2(\phi) = \frac{g(\phi)}{Z(\phi)}. \quad (18)$$

Для описания изменений со временем необходимо также знать функцию $g(\phi)$. Поскольку в начале координат $s = 0$, то в соответствии с (12) функция $g(\phi)$ вычисляется из условия

$$t = g(\phi(0, 0, 0, t)), \quad \text{или} \quad \phi(0, 0, 0, t) = h(t).$$

Таким образом, функциональный вид компонентов поля $A(\phi)$ и вид функций $h(t)$ и $g(\phi)$ определяются в начальный момент времени распределением поля $\phi(x, 0)$ вдоль координатных осей и заданным изменением $\phi(0, 0, 0, t)$ в начале координат.

4. Решения классического уравнения Хохлова – Заболотской

Как указывалось во введении, классическое уравнение Хохлова – Заболотской соответствует выбору $F(\phi) = \phi$. Это означает, что соотношение (9) примет такой вид:

$$A_0 = \phi + |A(\phi)|^2 = F(\phi) + A_1^2(\phi) + A_2^2(\phi). \quad (19)$$

При этом функции $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$ остаются произвольными дифференцируемыми функциями. Отсюда следует, что совокупность соотношений (10), которые теперь имеют вид

$$g(\phi) = t + (\phi + |A(\phi)|^2)x + A_1(\phi)y + A_2(\phi)z, \quad (20)$$

дают решение исходной задачи, зависящее от трех функциональных параметров $g(\phi)$ (или $h(\xi)$), а также $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$. При этом общая схема вычисления решений начальной задачи несколько меняется в связи с тем, что функция $A_0(\phi)$ теперь оказывается связанной с $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$. Это означает, что распределение $\phi(x, y, z, t)$ вдоль одной из координатных осей и времени будет определяться остальными осями, для которых распределение будет произвольным. Таким образом, решения (20) образуют лишь некоторое подмножество множества всех решений классического уравнения ХЗ в форме ривертонов. Тем не менее это множество решений в классе ривертонов оказывается мощным.

5. Границы смены числа листов

Построенные решения уравнений ОХЗ представляют собой ривертоны, построенные в работах [9]. Наиболее важным элементом геометрии ривертонов являются области, в которых решения имеют строго определенное число листов. Границы этих областей могут быть вычислены в трехмерном пространстве как огибающие кривых, в точках которых отдельные листы (фронты) многозначных решений пересекаются. Общая схема вычисления огибающих в произвольной размерности n была представлена в [9]. Приведем здесь построение решений рассматриваемой задачи в размерности $n = 3$ в варианте, несколько упрощающем построение области однозначности решений.

Уравнение для плоскостей, ортогональных базовой кривой в момент времени t , имеет вид решений (20), которые удобно переписать с таким виде:

$$yA_1(\phi) + zA_2(\phi) = g(\phi) - t - A_0(\phi)x = F(\phi, x, t). \quad (21)$$

В заданный момент времени параметром базовой кривой и плоскости фронта волны может служить само значение функции ϕ .

Рассмотрим две близких плоскости, соответствующие двум значениям параметров ϕ_1 и ϕ_2 :

$$yA_1(\phi_1) + zA_2(\phi_1) = F(\phi_1, x, t), \quad (22)$$

$$yA_1(\phi_2) + zA_2(\phi_2) = F(\phi_2, x, t). \quad (23)$$

Эти две плоскости пересекаются по некоторой прямой, координаты которой можно вычислить, решая пару уравнений (22) относительно y и z . Эти решения можно записать в таком виде:

$$y = \frac{P_2(\phi_1, x, t) - P_2(\phi_2, x, t)}{D(\phi_1) - D(\phi_2)}, \quad z = \frac{P_1(\phi_1, x, t) - P_1(\phi_2, x, t)}{D^{-1}(\phi_1) - D^{-1}(\phi_2)}, \quad (24)$$

где

$$D(\phi) = \frac{A_1(\phi)}{A_2(\phi)}, \quad P_k(\phi, x, t) = \frac{F(\phi, x, t)}{A_k(\phi)}, \quad k = 1, 2.$$

Переходя к пределу $\phi_1 \rightarrow \phi_2 = \phi$ и раскрывая правую часть (24) по правилу Лопиталя, получаем параметрическое представление огибающей пересечения фронтов волны в следующем виде:

$$y = \frac{\partial P_2(\phi, x, t)}{\partial \phi} \left(\frac{\partial D}{\partial \phi} \right)^{-1} = Y_0(\phi) + Y_1(\phi)x + Y_2(\phi)t,$$

$$z = -D^2(\phi) \frac{\partial P_1(\phi, x, t)}{\partial \phi} \left(\frac{\partial D}{\partial \phi} \right)^{-1} = Z_0(\phi) + Z_1(\phi)x + Z_2(\phi)t. \quad (25)$$

Эти соотношения задают поверхность как совокупность точек, координаты y, z которых зависят от двух свободных параметров ϕ и x . Теперь, задавая непосредственно конкретные функции $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ и $g(\phi)$, можно вычислить границу области однозначности.

6. Простые решения

Область однозначности состоит из точек, в которых решение принимает строго одно значение. В остальных областях решение может принимать при заданных значениях x, y, z, t конечное или даже бесконечное число значений. С физической точки зрения невозможно прямым образом интерпретировать многозначные решения в областях многозначности. В такой ситуации переходят от многозначных решений к однозначным слабым решениям [15], которые на границе областей однозначности и смены числа листов решения, испытывают скачок. Такие решения называются ударными волнами. В многомерном случае, который соответствует рассматриваемым в данной работе решениям трехмерных квазилинейных уравнений первого порядка, такой подход требует дополнительного анализа, выходящего за рамки данной статьи. Поэтому в данной работе ограничимся лишь вычислениями геометрических особенностей решений в форме ривертонов. Но начнем с указания на существование среди всех решений типа ривертонов и глобально однозначных решений.

Для решений (20) глобально однозначные решения типа ривертонов существуют при специальном выборе свободных функциональных параметров $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ и $g(\phi)$, равных линейным функциям:

$$A_1 = a_1 = \text{const}, \quad A_2 = a_2 = \text{const}, \quad g = g_1\phi + g_0.$$

Соответствующее общее решение находится из уравнения

$$(\phi + a_1^2 + a_2^2)x + a_1y + a_2z + t = g_1\phi + g_0 \quad (26)$$

и имеет вид

$$\phi = \frac{1}{g_1 - x} \left((a_1^2 + a_2^2)x + a_1y + a_2z + t - g_0 \right). \quad (27)$$

Это решение глобально однозначно, но имеет сингулярность на плоскости $x = g_1$.

Более сложное решение типа ривертонов, для которого уже имеется область неоднозначности, соответствует такому выбору функций $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ и $g(\phi)$, при которых уравнение (20) будет квадратичным полиномом по ϕ . Общий вид таких функций следующий:

$$A_1 = a_1 + k_1\phi, \quad A_2 = a_2 + k_2\phi, \quad g = g_2\phi g_1\phi + g_0,$$

где $a_1, a_2, k_1, k_2, g_0, g_1, g_2$ – постоянные.

Решение в этом случае имеет такой вид:

$$\phi = \frac{1}{\alpha} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right), \quad (28)$$

где

$$\alpha = x(k_1^2 + k_2^2) - g_0, \quad \gamma = (a_1^2 + a_2^2)x + a_1y + a_2z - g_0,$$

$$\beta = (1 + 2a_1k_1 + 2a_2k_2)x + k_1y + k_2z - g_1.$$

Это решение уже является вещественным только в области, где

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0.$$

В этой области имеются в общем случае два решения. Граница этой области, определяемая уравнением

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

представляет собой квадратичную поверхность в трехмерном пространстве. Эта поверхность отделяет область с двумя вещественными решениями от области, где вещественных решений нет. Эти решения сингулярны, как и предыдущее. Сингулярность располагается вдоль плоскости $x = g / (k_1^2 + k_2^2)$.

7. Границы области смены числа листов. Пример

Существуют два общих варианта базовых кривых, для которых построения области однозначности отличаются друг от друга. Первый вариант соответствует ситуации, когда базовая кривая является плоской, т.е. лежит в не-

которой плоскости P . Такая ситуация, например, возникает, если функции $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ отличаются друг от друга постоянным множителем:

$$A_2(\phi) = kA_1(\phi).$$

Для плоской кривой область однозначности будет представлять собой криволинейный цилиндр с осью, перпендикулярной плоскости P , в которой лежит базовая кривая. При этом огибающая поверхность будет представлять собой криволинейный цилиндр. Такая ситуация сводится фактически к двумерному варианту построения областей однозначности [9]. Более интересным вариантом является ситуация, когда базовая кривая не укладывается в какую-либо плоскость. В этом случае построение поверхностей будет более сложным. В данной работе рассмотрим именно такой случай.

Выберем функции $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ следующим образом:

$$A_1(\phi) = a\cos(\phi), \quad A_2(\phi) = a\sin(\phi), \quad (29)$$

где a – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$A_0 = \phi + a^2.$$

Выберем функцию $g(\phi)$ в таком виде:

$$g = b = \text{const}, \quad (30)$$

тогда

$$F(\phi, x, t) = b\phi - t - (\phi + a^2)x.$$

Соответственно получаем:

$$P_1 = -\frac{b-t+(\phi+a^2)x}{a\cos(\phi)}, \quad P_2 = -\frac{b-t+(\phi+a^2)x}{a\sin(\phi)}, \quad D = \tan^{-1}(\phi).$$

Уравнение границы области однозначности будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} y &= a^{-1} \left((b-t-(a^2+\phi)x) \cos(\phi) + x \sin(\phi) \right), \\ z &= a^{-1} \left((b-t-(a^2+\phi)x) \sin(\phi) - x \cos(\phi) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Поверхность, определяемая соотношениями (31), представлена на рис. 2 для двух моментов времени вместе с базовой кривой (выделена черным цветом), которая вычислялась в соответствии с (16). На рис. 3, 4 представлены сечения этих поверхностей для заданного значения x .

Приведенные на рис. 2, 3, 4 участки базовых кривых представляют собой криволинейные спирали и в силу малости радиусов этих спиралей на рис. 2, 3, 4 выглядят почти прямыми, которые указывают главное распространение волн.

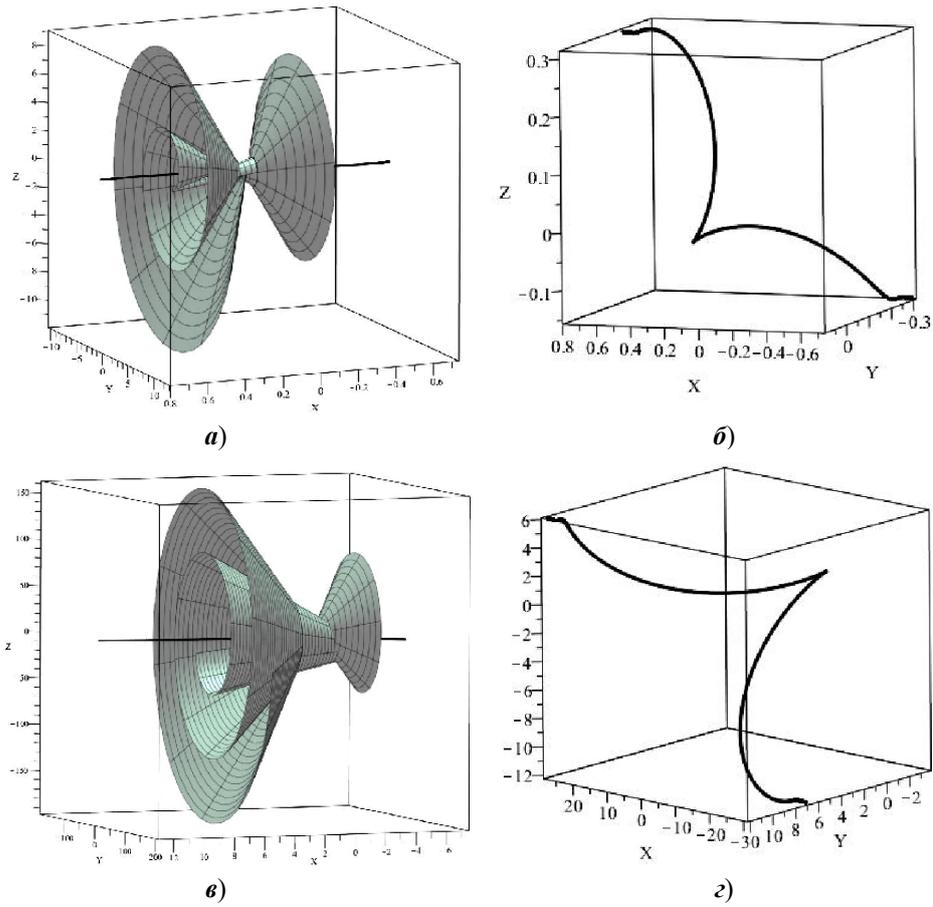


Рис. 2. Граница области смены числа листов (*a*, *б*) и участки базовых кривых (*б*, *г*), соответствующие (29) и (30), для $a = 0,5$; $b = 0,5$: *a*, *б*: $t = 0$; *в*, *г*: $t = 20$

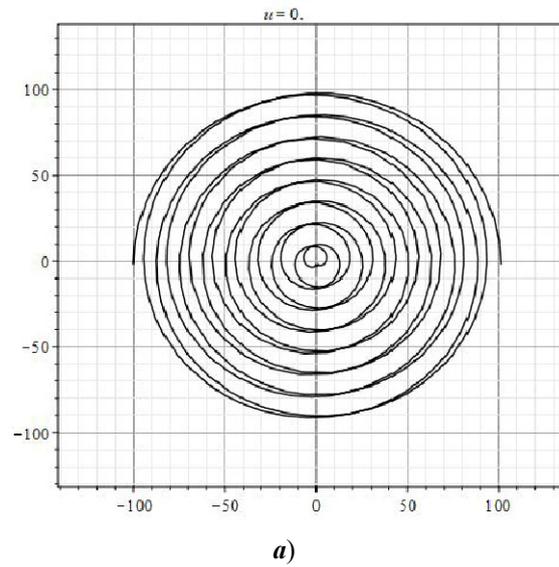


Рис. 3. Сечение поверхностей (рис. 2,*a*,*б*) для $x = 1$, $t = 0$

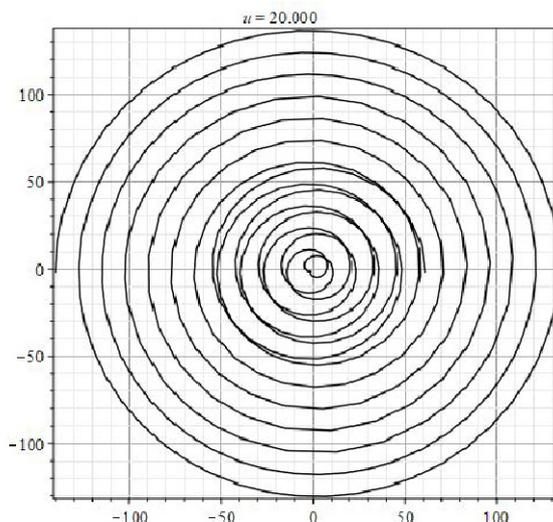


Рис. 4. Сечение поверхностей (рис. 2,а,б) для $x = 1, t = 20$

Заключение

Построенные решения обобщенного уравнения ХЗ (1) относятся к типу ривертонов и связаны с решениями квазилинейных уравнений первого порядка. Эти решения образуют множество, которое параметризуется тремя функциональными параметрами, что позволяет строить решения задач с заданными условиями на трех пространственных осях или двух пространственных и одной временной.

Множество таких решений не содержит всех возможных решений уравнений ХЗ, но дает способ строить точные решения, обладающие некоторыми заранее заданными характеристиками, например указанием базовой кривой, вдоль которой происходит распространение плоских фронтов нелинейного волнового процесса. Поскольку представленные здесь решения являются многозначными, то для прикладных задач они могут представлять базу для построения слабых решений, подобных ударным волнам. Однако эта задача выходит за рамки данной работы.

Список литературы

1. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акустический журнал. 1969. Т. 15, № 1. С. 40–47.
2. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М. : Наука, 1982. 174 с.
3. Маков Ю. Н. Об универсальном автомодельном решении уравнения Хохлова – Заболотской для волн с ударными фронтами // Акустический журнал. 1997. Т. 43, № 6. С. 828–833.
4. Руденко О. В. К 40-летию уравнения Хохлова – Заболотской // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 452–462.
5. Руденко О. В. «Экзотические» модели физики интенсивных волн: линеаризуемые уравнения, точно решаемые задачи и неаналитические нелинейности // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 3. С. 7–34.

6. Маков Ю. Н. Локализованные волновые структуры, определяемые точными решениями уравнения Хохлова – Заболотской // *Акустический журнал*. 2019. Т. 65, № 3. С. 291–297.
7. Lin C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // *Journal of Mathematics and Physics*. 1948. Vol. 27, № 3. P. 220–231.
8. Чигур О. И. Точные сингулярные решения уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова // *Ученые записки Физического факультета Московского университета*. 2018. № 4. С. 1840602-1–5.
9. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями // *Теоретическая и математическая физика*. 2013. Т. 174, № 2. С. 236–246.
10. Журавлев В. М. Опрокидывающиеся электромагнитные волны в средах с сильной нелинейностью // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2013. № 3. С. 117–135.
11. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2013. № 4. С. 56–67.
12. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов // *Теоретическая и математическая физика*. 2016. Т. 186, № 3. С. 371–385.
13. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные уравнения Клейна – Гордона и ривертони // *Теоретическая и математическая физика*. 2018. Т. 197, № 3. С. 356–370.
14. Журавлев В. М. Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок. Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2020. 182 с.
15. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., Чугайнова А. П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М. : МИАН, 2011. 122 с.

References

1. Zabolotskaya E.A., Khokhlov R.V. Quasi-plane waves in nonlinear acoustics of limited beams. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 1969;15(1):40–47. (In Russ.)
2. Bakhvalov N.S., Zhileykin Ya.M., Zabolotskaya E.A. *Nelineynaya teoriya zvukovykh puchkov = Nonlinear theory of sound beams*. Moscow: Nauka, 1982:174. (In Russ.)
3. Makov Yu.N. On the universal self-similar solution of the Khokhlov–Zabolotskaya equation for waves with shock fronts. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 1997;43(6):828–833. (In Russ.)
4. Rudenko O.V. To the 40th anniversary of the Khokhlov–Zabolotskaya equation. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 2010;56(4):452–462. (In Russ.)
5. Rudenko O.V. “Exotic” models of high-intensity wave physics: linearizable equations, exactly solvable problems and non-analytic nonlinearities. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika = University proceedings. Applied nonlinear dynamics*. 2018;26(3):7–34. (In Russ.)
6. Makov Yu.N. Localized wave structures determined by exact solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya equations. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 2019;65(3):291–297. (In Russ.)
7. Lin S., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid. *Journal of Mathematics and Physics*. 1948;27(3):220–231.
8. Chigur O.I. Exact singular solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov equation. *Uchenye zapiski Fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta = Proceedings of the faculty of physics of Moscow University*. 2018;(4):1840602-1–5. (In Russ.)

9. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations with multivalued solutions. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2013;174(2):236–246. (In Russ.)
10. Zhuravlev V.M. Breaking electromagnetic waves in media with strong nonlinearity. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2013;(3):117–135. (In Russ.)
11. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations and complex quasilinear equations of the first order. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2013;(4):56–67. (In Russ.)
12. Zhuravlev V.M. Multidimensional quasilinear equations of the first order and multivalued solutions of equations of hyperbolic and elliptic types. *Teo-reticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2016;186(3):371–385. (In Russ.)
13. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear Klein–Gordon equations and rivertons. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2018;197(3):356–370. (In Russ.)
14. Zhuravlev V.M. *Nelineynye integriruemye modeli fizicheskikh protsessov. Metod funktsional'nykh podstanovok = Nonlinear integrable models of physical processes. Functional substitution method*. Ulyanovsk: Izd-vo UIGU, 2020:182. (In Russ.)
15. Kulikovskiy A.G., Sveshnikova E.I., Chugaynova A.P. *Matematicheskie metody izucheniya razryvnykh resheniy nelineynykh giperbolicheskikh sistem uravneniy = Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations*. Moscow: MIAN, 2011:122. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев

доктор физико-математических наук,
профессор, научный сотрудник
лаборатории гравитации, космологии
и астрофизики, Ульяновский
государственный педагогический
университет (Россия, г. Ульяновск,
пл. Ленина, 4/5)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Viktor M. Zhuravlev

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, researcher of the
laboratory of gravity, cosmology
and astrophysics, Ulyanovsk State
Pedagogical University
(4/5 Lenina square, Ulyanovsk, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 29.12.2023

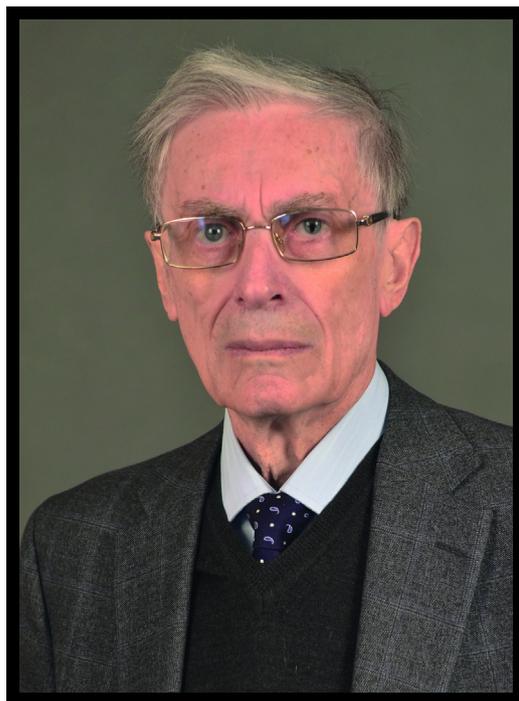
Поступила после рецензирования и доработки / Revised 07.02.2024

Принята к публикации / Accepted 26.02.2024

ПАМЯТИ УЧЕНЫХ IN THE MEMORY OF SCIENTISTS

ПАМЯТИ ИЛЬИ ВЛАДИМИРОВИЧА БОЙКОВА
(19.03.1941 – 02.05.2024)

COMMEMORATING IL'YA VLADIMIROVICH BOYKOV
(19.03.1941 – 02.05.2024)



2 мая 2024 г. ушел из жизни замечательный человек и выдающийся ученый Илья Владимирович Бойков, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета, почетный работник высшей школы Российской Федерации.

Илья Владимирович родился 19 марта 1941 г. в г. Кременчуге Полтавской области. В 1963 г. окончил Пензенский политехнический институт по специальности «Математические и счетно-решающие приборы и устройства», а в 1968 г. – с отличием заочное отделение механико-математического факультета Казанского государственного университета имени В. И. Ульянова-Ленина, где был оставлен в аспирантуре при кафедре математического анализа. В 1973 г. защитил диссертацию кандидата физико-математических наук, а в 1991 г. защитил докторскую диссертацию в Вычислительном центре Сибирского отделения Академии наук СССР. В 1992 г. Илье Владимировичу присвоено звание профессора, в 2001 г. – «Почетный работник высшей школы РФ».

Под его руководством защищено 17 диссертаций; он являлся автором более 500 научных работ, 11 монографий, 11 учебных пособий, обладателем 4 авторских свидетельств, 7 свидетельств о регистрации программ и 2 патентов. Почти 50 лет (с 1974 по 2022 г.) Илья Владимирович руководил кафедрой «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета.

Илья Владимирович был создателем и бессменным руководителем на протяжении долгих лет научно-педагогической школы «Аналитические и численные методы решения задач математической физики». В рамках этой школы велась продуктивная научная работа по таким направлениям, как теория приближения функций, теория квадратурных и кубатурных формул, численные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, численные методы геофизики, математические методы в экономике и экологии, устойчивость динамических систем.

За свою более чем полувековую научную деятельность Илья Владимирович принял участие в нескольких десятках международных и всероссийских научных конференций, участвовал в работе нескольких диссертационных советов. Илья Владимирович успешно вел не только научную, но и педагогическую деятельность. Под его руководством подготовлено большое количество выпускников-математиков.

Научная работа И. В. Бойкова была поддержана рядом грантов – Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований, Министерства образования Российской Федерации, Российского гуманитарного научного фонда, программы «Университеты России», Федерального агентства по образованию Российской Федерации.

Илья Владимирович являлся членом редколлегии журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки», Журнала Средневолжского математического общества. На протяжении многих лет был рецензентом научных работ для широкого круга математических журналов, готовил рефераты для баз данных Mathematical Reviews и Zentralblatt MATH (в настоящее время zbMATH Open).

С 2006 г. был председателем оргкомитета Международных научных конференций «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем», «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем», охватывающих своей тематикой практически весь спектр прикладной математики и ее приложений в физике, технике, экономике и экологии.

Илья Владимирович был человеком большой эрудиции, обладал замечательным чувством юмора, отличался простотой в общении. С ним одинаково интересно было общаться как студентам, так и преподавателям. Илья Владимирович всегда был готов обсудить различные проблемы, поделиться своим уникальным жизненным опытом. Сотрудники, работавшие под его руководством, с благодарностью вспоминают ту поддержку, которую он оказывал коллективу кафедры. Среди преподавателей и сотрудников университета он пользовался заслуженным уважением и авторитетом.

Ушел из жизни выдающийся ученый, прекрасный педагог, уникальный человек. Память о нем всегда будет в наших сердцах.

От коллег и редакции

Вниманию авторов!

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows (тип файла – RTF, DOC).

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах. Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полуторный интервал. Статья **обязательно** должна содержать индекс УДК, ключевые слова и развернутую аннотацию объемом от 100 до 250 слов, имеющую четкую структуру **на русском** (Актуальность и цели. Материал и методы. Результаты. Выводы) **и английском языках** (Background. Materials and methods. Results. Conclusions).

Обращаем внимание авторов на то, что в соответствии с этическим кодексом журнала для обеспечения единообразия перевод фамилии, имени, отчества каждого автора на английский язык (в сведениях об авторах и списке литературы) осуществляется автоматически с использованием программы транслитерации в кодировке BGN (сайт translit.ru).

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями.

Формулы в тексте статьи **обязательно** должны быть набраны в редакторе формул Microsoft Word Equation (версия 3.0) или MathType. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. **Требования к оформлению списка литературы** на русские и иностранные источники: **для книг** – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; **для журнальных статей, сборников трудов** – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; **для материалов конференций** – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам статьи **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание и должность, место и юридический адрес работы (на русском и английском языках), e-mail, контактные телефоны (желательно сотовые).

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Рукопись, полученная редакцией, не возвращается. Редакция оставляет за собой право проводить редакционную и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год. Научные направления (группы специальностей):

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

1.1.6. Вычислительная математика

1.3.3. Теоретическая физика

1.3.6. Оптика

1.3.8. Физика конденсированного состояния

1.3.11. Физика полупроводников

1.3.15. Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. +7 (8412) 64-32-89. E-mail: volgavuz@pnzgu.ru

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 20__ г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____

(подпись)

(ФИО)

Дата « ____ » _____ 20__ г.